1. Espaces Vectoriels

Exercice 1 (Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$)**.**
Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = x + y + z = 0\}$
$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + a = 0 \text{ et } y + 3az = 0\}$
$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 - z^2 = 0\}$
$E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | e^x e^y = 0\}$
$E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z(x^2 + y^2) = 0\}$

Exercice 2 (Sous-espaces de fonctions)**.**
Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^\mathbb{R} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

$E_1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(1) = 0\}$
$E_2 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(0) = 1\}$
$E_3 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 0\}$
$E_4 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{ est monotone}\}$
$E_5 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{ est solution de l'équation différentielle } : f' + (x^2 + 1)f = 0\}$

Exercice 3 (Sous-espaces de polynomes)**.**
Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$

$G_1 = \{P \in \mathbb{R}_n[X] | P' = 3\}$
$G_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] | P(0) = 2P(1)\}$
$G_3 = \{P \in \mathbb{R}[X] | P \text{ est de degré pair }\}$
$G_4 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] | P''(2) = 0\}$

Exercice 4.
On considère dans $\mathbb{C}^3$ les vecteurs $x_1 = (1, 0, 1), x_2 = (1, \imath, 3)$ et $x_3 = (-2, 1, \imath)$. Démontrer qu'ils forment une famille libre.

Exercice 5 (Sous-espaces de $\mathbb{R}^3$)**.**
On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$\vec{a} = (1, 2, 1), \qquad \vec{b} = (1, 3, 2), \qquad \vec{c} = (1, 1, 0), \qquad \vec{d} = (3, 8, 5)$$

Soient $F = \text{vect}(\vec{a}, \vec{b})$ et $G = \text{vect}(\vec{c}, \vec{d})$. Comparer F et G.

Exercice 6.
On considère dans $\mathbb{R}^2$ les vecteurs $x_1 = (1, 1), x_2 = (0, 2)$.
a) Vérifier que $\mathcal{X} = (x_1, x_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
b) Calculer dans la base $\mathcal{X}$ les composantes des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
c) Calculer dans la base $\mathcal{X}$ les composantes d'un élément quelconque de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7. Soient P_0, P_1, P_2 et P_3, les polynomes de $\mathbb{R}_2[X]$ définis par :

$$P_0 = \frac{1}{2}(X-1)(X-2), P_1 = \frac{1}{2}X(X-1), P_2 = 2X(X-2), P_3 = \frac{1}{3}(X-1)(X-3)$$

(1) Montrer que P_0, P_1, P_2 est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
(2) On pose $F = vect\{P_0, P_1\}$ et $G = vect\{P_2, P_3\}$.
Calculer $\dim F$, $\dim G$, $\dim(F+G)$, $\dim(F \cap G)$.

Exercice 8. On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $x_1 = (1,1,1,2), x_2 = (0,2,0,0), x_3 = (1,-1,2,2)$ et $x_4 = (1,-1,2,3)$.
a) Vérifier que $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
b) Calculer dans la base $\mathcal{X}$ les composantes des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
c) Calculer dans la base $\mathcal{X}$ les composantes d'un élément quelconque de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 9 (Libérez les familles !)**.**
Etudier la liberté des familles $\mathcal{F}$ dans les espaces E
(1) $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{F} = (\sin, \cos)$.
(2) $E = \{f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{F} = (f_a : x \mapsto x^a), a \in \mathbb{R}$.
(3) $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{F} = (f_a : x \mapsto |x-a|), a \in \mathbb{R}$.

Exercice 10. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré $\leq n$.
a) Soit $P_0, P_1, ..., P_n$ des polynômes de E tels que $\deg P_k = k$ (pour $0 \leq k \leq n$). Montrer que $(P_0, P_1, ..., P_n)$ est une base de E.
b) Soit P un polynôme de degré n. Montrer que $(P, P', \ldots, P^{(n)})$ est une base de E. Soit $a \in \mathbb{R}$; déterminer les composantes du polynôme Q défini par $Q(X) = P(X+a)$ dans la base $(P, P', \ldots, P^{(n)})$.

---

2. Applications Linéaires

Exercice 11 (Apllications linéaires, liberté)**.**
Soient E, F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ linéaire.
(1) Montrer que f est injective si et seulement si f transforme toute famille libre de E en une famille libre de F.
(2) Montrer que f est surjective si et seulement s'il existe une famille génératrice de E transformée par f en une famille génératrice de F

Exercice 12. On rappelle que l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans lui-même est un espace vectoriel pour les opérations usuelles. On considère les quatre fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les formules

$$f_1(x) = e^x \cos x \qquad f_2(x) = e^x \sin x$$
$$f_3(x) = e^{-x} \cos x \qquad f_3(x) = e^{-x} \sin x$$

(1) Montrer qu'elles sont linéairement indépendantes.
(2) On note E l'espace vectoriel des combinaisons linéaires de ces quatre fonctions. Montrer que si $f \in E$ alors $f' \in E$.
(3) On note d l'application de E dans lui-même qui à chaque f associe f'. Vérifier que d est une application linéaire.

(4) Déterminer la matrice de d dans la base (f_1, f_2, f_3, f_4) de E.

Exercice 13 (Application sur les polynomes)**.**
Soit $\phi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $\phi(P) = P - (X-2)P'$

(1) Montrer que ϕ est linéaire.
(2) Dans le cas particulier où $n = 2$, déterminer $\mathrm{Ker}\phi$ et donner une base de $\mathrm{Ker}\phi$.
(3) Calculer $\phi(1)$, $\phi(X)$, puis $\phi(X^p)$ pour $p \leq n$. En déduire une base de $\mathrm{Im}\,\phi$ puis la dimension $\dim \mathrm{Im}\,\phi$
(4) Dans le cas général, déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}\phi$ et donner une base de $\mathrm{Ker}\phi$.

Exercice 14. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On définit l'application $f : F \times G \to E$ par $f(x, y) = x + y$.
a) Montrer que f est linéaire.
b) Déterminer le noyau et l'image de f.
c) Montrer que l'on a équivalence entre :

(i) f est un isomorphisme,
(ii) $E = F \oplus G$,
(iii) $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$.

d) On suppose que E est de dimension finie. Appliquer le théorème du rang à f.

Exercice 15. On désigne par $\mathcal{I}$ le sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions impaires, et par $\mathcal{P}$ celui des fonctions paires. Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{I} \oplus \mathcal{P}$. Si $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, donner la décomposition explicite $f = f_i + f_p$ avec $f_i \in \mathcal{I}$ et $f_p \in \mathcal{P}$.

Exercice 16 (Tout vecteur est propre)**.**
Soient E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

(1) Montrer que si $x \neq 0$, il existe un unique scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.
(2) Montrer que si (x, y) est une famille libre, alors $\lambda_x = \lambda_y$
(3) Montrer que f est une homothétie (i.e. de la forme $f = k \cdot \mathrm{Id}$.

Exercice 17 (Apllications du thm du rang)**.**
Soient E, F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ linéaire.

(1) Montrer que si H est un sous-espace vectoriel de E, alors
$$\dim f(H) = \dim H - \dim(H \cap \mathrm{Ker} f)$$
(2) Montrer que si K est un sous-espace vectoriel de F, alors
$$\dim f^{-1}(K) = \dim(K \cap \mathrm{Im}\, f + \dim(\mathrm{Ker} f)$$
(3) Si $g : E \to F$ est une autre application linéaire, alors
$$\dim(\mathrm{Ker}(f+g)) \leq \dim(\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Ker} g) + \dim(\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, v)$$

Exercice 18. On suppose que σ est une application continue de $[0, 1]$ dans lui-même telle que $\sigma \circ \sigma = I_{[0,1]}$. Donner un exemple d'une telle application σ différente de $I_{[0,1]}$. On note
$$G = \{\, f \in C([0,1], \mathbb{R})\,;\ f \circ \sigma = f \,\}$$
$$H = \{\, f \in C([0,1], \mathbb{R})\,;\ f \circ \sigma = -f \,\}$$
Montrer que $C([0, 1], \mathbb{R}) = G \oplus H$.

Exercice 19 (Encore le rang)**.**
Soient E, F deux ev et $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$.

(1) Montrer que $\mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.
(2) Montrer qu'il y a égalité si et seulement si $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g = \{0\}$ et $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Ker} g = E$.

---

3. Matrices

Exercice 20.
On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer AB, AC, CA, BC, CD et ED.
(2) Quelles sont les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ telles que la matrice $B'_m = \begin{pmatrix} 4+m & 3-m \\ 2 & 1+m \end{pmatrix}$ vérifie $B'_m B = B B'_m$?
(3) Déterminer toutes les matrices $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telles que $BM = MB$

Exercice 21. Calculer l'inverse de chacune des matrices suivantes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 22 (Matrice d'endomorphismes)**.**
Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynomes de degré inférieur ou égal à 3.
On considère l'application linéaire $f : P \mapsto 2P - xP' + P''$

(1) Déterminer l'image de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$
(2) Donner la matrice de f dans la base canonique.
(3) Déterminer $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker} f$.

Exercice 23. (1) Calculer $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n telles que $AB = 0$. Dans quel cas la matrice A peut elle être inversible?

Exercice 24. Soit t l'application linéaire de $\mathbb{R}^5$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathrm{Ker} T$ et $\mathrm{Im} T$.

Consultez régulièrement `http://www.latp.univ-mrs.fr/~coulbois/2013/alg-lin-2`.