1. Dualité

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$. Montrer qu'une forme linéaire non nulle définie sur E est surjective.

Exercice 2.

(1) Montrez que les trois vecteurs suivant forment une base de $\mathbb{R}^3$.

$$(1,2,4); (0,1,1); (1,1,1).$$

(2) Trouvez la base duale.

Exercice 3. Soient f_1 et f_2 les deux applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies pour chaque $X = (x, y)$ par $f_1(X) = x + y$ et $f_2(X) = x + 2y$.

(1) Montrer que (f_1, f_2) est une base de $[\mathbb{R}^2]^*$.
(2) Exprimer f_1 et f_2 à l'aide de la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
(3) Quelles sont dans la base (f_1, f_2) les composantes des formes linéaires suivantes : $f(X) = x, g(X) = 2x - 3y$ et $h(X) = x - y$.
(4) Déterminer la base de $\mathbb{R}^2$ dont (f_1, f_2) est la base duale.

Exercice 4. On note C l'espace vectoriel réel des suites convergentes de réels et C_0 le sous-espace des suites qui convergent vers 0.
On note Φ l'application de C dans $\mathbb{R}$ qui à chaque suite $x = (x_n)_{n\geq 1}$ associe $\Phi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(1) Montrer que Φ est une forme linéaire sur C.
(2) Quel est son noyau?
(3) Etant donnée une suite $x = (x_n)_{n\geq 1} \in C$ on lui associe la suite $y = (y_k)_{k\geq 1}$ définie par $y_1 = \Phi(x)$ et $y_{k+1} = x_k - \Phi(x)$. pour $k \geq 1$.
Montrer que $y \in C_0$.
(4) Montrer que l'application $u : C \to C_0$ ainsi définie est un isomorphisme.
(5) On désigne par C_{st} le sous-espace de C des suites constantes.
Montrer que $C = C_0 \oplus C_{st}$.

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les formes linéaires :

$$f_1(x, y, z) = x + 2y + 3z \ , \ f_2(x, y, z) = -2z \ , \ f_3(x, y, z) = 2x + 2y + 3z.$$

(1) Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de $(\mathbb{R}^3)^*$.
(2) Trouver la base antéduale.

Exercice 6. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. Pour $i = 0 \dots 3$, on considère les formes linéaires

$$f_i : P \mapsto \int_0^1 t^i P(t) dt$$

(1) Montrer que (f_0, f_1, f_2, f_3) est une base de E^*.
(2) Trouver la base antéduale.

Exercice 7.
Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2. On définit les applications $\phi,\ \phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3$ de E dans $\mathbb{R}$ par:

$$\phi(P) = \int_0^1 P(t)dt, \quad \phi_1(P) = P(0), \quad \phi_2(P) = P(1), \quad \phi_3(P) = P'(0), \quad \text{pour tout } P \in E.$$

(1) Montrer que (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) est une base de E^*.
(2) Déterminer la base (u_1, u_2, u_3) antéduale de (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3).
(3) a) Montrer qu'il existe des réels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que $\phi = \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2 + \alpha_3\phi_3$
  b) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $\alpha_i = \int_0^1 u_i(t)dt$.
  c) Calculer α_i pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$.

Exercice 8. On note $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 3. On rappelle que $\mathcal{U} = (\,1, X, X^2, X^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. On considère les quatre formes linéaires f_1, f_2, f_3 et f_4 définies sur $\mathbb{R}_3[X]$ par

$$f_1(p) = p(0) \qquad f_2(p) = p(1) \qquad f_3(p) = p'(0) \qquad f_4(p) = p'(1).$$

(1) Déterminer les composantes de chacune des formes linéaires f_1, f_2, f_3 et f_4 dans la base duale de la base $\mathcal{U}$.
(2) Montrer que (f_1, f_2, f_3, f_4) est une base de $[\mathbb{R}_3[X]]^*$.
(3) Déterminer la base de $\mathbb{R}_3[X]$ dont (f_1, f_2, f_3, f_4) est la base duale.
(4) Montrer que l'application linéaire $\Phi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^4$ définie, pour chaque p, par

$$\Phi(p) = (f_1(p), f_2(p), f_3(p), f_4(p))$$

est un isomorphisme.
(5) On note f la forme linéaire sur $\mathbb{R}_3[X]$ définie, pour chaque p par, $f(p) = \displaystyle\int_0^1 p(t)dt$.
Déterminer les composantes de f dans la base (f_1, f_2, f_3, f_4).

Exercice 9. On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles. A chaque $\theta \in [\mathbb{R}[X]]^*$, on associe la suite $\sigma(\theta) = (\theta(X^n))_{n\geq 0}$. Montrer que $\sigma : [\mathbb{R}[X]]^* \to E$ est un isomorphisme.

Exercice 10. Soit un espace vectoriel E et $\phi, \psi \in E^*$ deux formes linéaires non nulles. On suppose que $\mathrm{Ker}\phi \subset \mathrm{Ker}\psi$.

(1) Montrer que $\mathrm{Ker}\phi = \mathrm{Ker}\psi$.
(2) Soit $a \in E$ tel que $\phi(a) = 1$. Montrer que $\psi = \psi(a)\phi$. [On pourra écrire un élément de E comme la somme d'unélément de $\mathrm{Ker}\phi$ et d'un multiple de a.]
(3) Application - Soit H un hyperplan de E. Montrer que $\{\phi \in E^* : \phi(x) = 0 \quad \forall x \in H\}$ est une droite de E^*.

Exercice 11.
Soit E l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes réels telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.

(1) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie.
(2) Soient f_0 l'application de E dans $\mathbb{R}$ telle que $f_0(u) = u_0$ et f_1 l'application de E dans $\mathbb{R}$ telle que $f_1(u) = u_1 + u_0$. Trouver la base duale de (f_0, f_1).

Exercice 12. On considère la matrice $A = (a_{i,j})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit $\mathrm{tr}(A)$ comme la somme $\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

(1) Montrer que tr est une forme linéaire.
(2) Montrez que pour toutes matrices A, B on a $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
(3) Montrez que si A et B sont semblables, alors $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.

Exercice 13. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes réels de degré au plus 2. On considère l'application:

$$\begin{array}{rccc} \langle\ ,\ \rangle: & E^2 & \mapsto & \mathbb{R} \\ & (P,Q) & \to & \langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)tdt. \end{array}$$

(1) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur E.
(2) Soit $P_1 = X^2$, $P_2 = X^2 - \frac{2}{3}$ et $P_3 = X^2 + X$. Montrer que (P_1, P_2, P_3) forme une base de E.
(3) Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à la base (P_1, P_2, P_3) pour obtenir une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de E.
(4) Soit ϕ_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) la forme linéaire sur E définie par:

$$\phi_i(P) = \langle e_i, P\rangle.$$

Montrer que (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) est une base de E^*.
(5) Déterminer la base antéduale de (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3).

Consultez régulièrement `http://www.latp.univ-mrs.fr/~coulbois/2013/alg-lin-2`.