Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Licence de mathématiques, 2e année
Algèbre Linéaire 2 (MAT06)

Devoir à la maison
Mardi 27 novembre 2012

☒ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Enseignants : T. Coulbois, F. Palesi, H. Short

Vous porterez une attention particulière sur la rédaction.

Exercice I. Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} 4m-7 & -5 & 6m-6 \\ -3m+7 & m+5 & -6m+6 \\ -2m+5 & 3 & -3m+5 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique $\chi_m(X)$ de A_m *Vous pouvez, par exemple, lors du calcul du polynôme caractéristique, ajouter la première ligne à la deuxième.*
2. Vérifier que 2 est valeur propre et factoriser $\chi_m(X)$ par $X-2$.
3. Déterminer le spectre de A_m.
4. Pour quelles valeurs de m la matrice A_m est-elle diagonalisable ? *Attention il y a deux valeurs particulières de m à traiter séparément.*
5. Si $m = 2$ et u_2 est un vecteur propre associé à la valeur propre 2, montrer qu'il existe un vecteur v_2 tel que $A_2 v_2 = u_2 + 2v_2$.
6. En déduire, toujours dans le cas où $m = 2$, que A_2 est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice II. Soit a, b, c trois réels, $B = \begin{pmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ c & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ c & \dots & \dots & c & a \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

(B et M sont des matrices carrées $n \times n$). On considère le polynôme $P(X) = \det(B + XM)$.
1. Calculer $P(-c)$ et $P(-b)$.
2. Montrer que P est un polynôme de degré ≤ 1 en X. *Vous pouvez, par exemple, soustraire la première colonne à toutes les autres, puis utiliser la multilinéarité du déterminant.*
3. En déduire $\det B$.