Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

**Licence de mathématiques**, 2e année
Algèbre Linéaire 2 (SMI3U2)

**2e session**
Vendredi 21 juin 2013

☒ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

*Deux heures, ni calculatrices, ni documents*

Enseignants : T. Coulbois, F. Palesi, H. Short

**Exercice I. (Cours, 6 points)**

**1.** Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimension finie. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soit $\mathcal{B}$ une base de $E$ et $\mathcal{B}'$ une base de $F$. Donner la définition de la matrice de $f$ par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

**2.** Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel $E$. Donner la définition de la base duale $(e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*)$.

**3.** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $P$ un polynôme. Montrer que si $\lambda$ est une valeur propre de $A$ et $P(A) = 0$, alors $P(\lambda) = 0$.

**Exercice II.** Soit $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}$ pour $k \in \mathbb{R}$.

**1.** Utiliser le théorème de Cayley-Hamilton pour trouver l'inverse de $A_k$ lorsque cela est possible.

**2.** Pour quelles valeurs de $k$ la matrice $A_k$ est-elle diagonalisable ? Trigonalisable ?

**3.** Donner des bases qui rendent la matrice diagonale/triangulaire quand ceci est possible.

**Exercice III.** **1.** Soit $a$ et $b$ deux réels et $n \geq 2$, calculer le déterminant $n \times n$ :

$$\begin{vmatrix} a & b & \ldots & \ldots & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \ldots & \ldots & b & a \end{vmatrix}$$

**2.** Soit $n \geq 2$ et $a_1, \ldots, a_n$ des réels. Montrer que $u = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de

$$D = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1 & 0 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_2 & 0 & \ldots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots a_n & 0 \end{pmatrix}.$$

**3.** Calculer $\det(D)$.