Faculté des Sciences
Aix*Marseille Université

Licence de mathématiques, 2e année
Algèbre Linéaire 2 (SMI3U2)

2e session
Vendredi 21 juin 2013

☒ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Deux heures, ni calculatrices, ni documents

Enseignants : T. Coulbois, F. Palesi, H. Short

Exercice I. (Cours, 6 points)

1. Soit E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimension finie. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. Donner la définition de la matrice de f par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

2. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel E. Donner la définition de la base duale $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$.

3. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et P un polynôme. Montrer que si λ est une valeur propre de A et $P(A) = 0$, alors $P(\lambda) = 0$.

Exercice II. Soit $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}$ pour $k \in \mathbb{R}$.

1. Utiliser le théorème de Cayley-Hamilton pour trouver l'inverse de A_k lorsque cela est possible.

Le polynôme caractéristique de A_k est

$$P_k(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 1 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 0 & 1 & k-X \end{vmatrix} = (1-X)\begin{vmatrix} 1-X & 0 \\ 1 & k-X \end{vmatrix} = (1-X)^2(k-X)$$
$$= (X^2-2X+1)(k-X) = -X^3+(k+2)X^2-(2k+1)X+k.$$

Les valeurs propres sont donc 1 et k. La matrice A_k est inversible si, et seulement si, 0 n'est pas valeur propre, et donc, si, et seulement si, $k \neq 0$. Le théorème de Cayley-Hamilton affirme que $P_k(A_k) = 0$ et donc en utilisant notre calcul précédent

$$-{A_k}^3 + (k+2){A_k}^2 - (2k+1)A_k + kI_3 = 0.$$

Nous obtenons

$$I_3 = \frac{1}{k}({A_k}^3 - (k+2){A_k}^2 + (2k+1)A_k) = A_k\left(\frac{1}{k}({A_k}^2 - (k+2)A_k + (2k+1)I_3)\right).$$

Enfin

$${A_k}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k+1 & k^2 \end{pmatrix},$$

ce qui nous donne

$${A_k}^{-1} = \frac{1}{k}({A_k}^2 - (k+2)A_k + (2k+1)I_3)$$
$$= \frac{1}{k}\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 & k+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k+1 & k^2 \end{pmatrix} - (k+2)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix} + (2k+1)I_3\right)$$
$$= \frac{1}{k}\begin{pmatrix} k & 1-k & -1 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Pour quelles valeurs de k la matrice A_k est-elle diagonalisable ? Trigonalisable ?

Calculons le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 :

$$\begin{cases} y+z=0 \\ y+(k-1)z=0 \end{cases}$$

si $k=2$ alors ce sous-espace propre est de dimension 2 sinon il est de dimension 1.
Résumons.

$\underline{k=1}$: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, une seule valeur propre 1 de multiplicité algébrique 3 et de multiplicité géométrique 1. A_1 n'est pas diagonalisable.

$\underline{k=2}$: $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, deux valeurs propres 1 et 2. 1 est de multiplicité algébrique 2 et de multiplicité géométrique 2. 2 est de multiplicité algébrique et géométrie 1. A_2 est diagonalisable.

$\underline{k \neq 1, 2}$: deux valeurs propres 1 et k. 1 est de multiplicité algébrique 2 et de multiplicité géométrique 1. k est de multiplicité algébrique et géométrie 1. A_k n'est pas diagonalisable.

Dans tous les cas le polynôme caractéristique est scindé et donc A_k est trigonalisable.

3. Donner des bases qui rendent la matrice diagonale/triangulaire quand ceci est possible.

Distinguons les cas :

<u>$k=2$</u> : le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 a pour équation $y+z=0$, les vecteurs $u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $v_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ forment une base de ce sous-espace propre.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 a pour équation

$$\left\{\begin{array}{l}-x+y+z=0\\ y=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}x=z\\ y=0.\end{array}\right.$$

$u_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 2.

(u_1,v_1,u_2) est une base de vecteurs propres. Soit $P_2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique dans cette base, alors ${P_2}^{-1}A_2P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

<u>$k\neq 1,2$</u> : le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 a pour équation $\left\{\begin{array}{l}y+z=0\\ y+(k-1)z=0\end{array}\right. \iff y=z=0$, $u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1. Le sous-espace propre associé à la valeur propre k a pour équation $\left\{\begin{array}{l}(1-k)x+y+z=0\\ (1-k)y=0\\ y=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}y=0\\ z=(k-1)x\end{array}\right.$ $u_k=\begin{pmatrix}1\\0\\k-1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre k. Soit $v=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, soit $P_k=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&k-1&0\end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique vers la base de trigonalisation (u_k,u_1,v) alors ${P_k}^{-1}A_kP_k=\begin{pmatrix}k&0&*\\0&1&*\\0&0&1\end{pmatrix}$.

<u>$k=1$</u> : le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 a pour équation $\left\{\begin{array}{l}y+z=0\\ y=0\end{array}\right. \iff y=z=0$, $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1. Soit $e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, nous remarquons que $A_1e_1=e_1+e_3$. Soit $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique vers la base de trigonalisation (e_1,e_3,e_2) alors ${P_1}^{-1}A_1P_1=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Exercice III. **1.** Soit a et b deux réels et $n \geq 2$, calculer le déterminant $n \times n$:

$$\begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{vmatrix}$$

En additionnant toutes les lignes à la première ligne, le déterminant cherché est

$$\begin{vmatrix} a+(n-1)b & \dots & \dots & \dots & \dots & a+(n-1)b \\ b & a & b & \dots & b & b \\ b & b & a & \ddots & \vdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & a & b \\ b & b & \dots & \dots & b & a \end{vmatrix} = (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ b & a & b & \dots & \dots & b \\ \vdots & \ddots & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & \dots & \dots & b & a \end{vmatrix}$$

et en soustrayant la première colonne à toutes les autres colonnes

$$= (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ b & a-b & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$$

2. Soit $n \geq 2$ et $a_1, \dots, a_n$ des réels. Montrer que $u = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de

$$D = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & 0 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & 0 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots a_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous calculons facilement $Du = (a_1 + \dots + a_n)u$ et donc u est un vecteur propre associé à la valeur propre $a_1 + \dots + a_n$.

3. Calculer $\det(D)$.

En additionnant toutes les colonnes à la première colonne nous obtenons :

$$\det(D) = (a_1 + \cdots + a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_2 & 0 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \dots a_n & 0 \end{vmatrix}$$

puis en soustrayant a_j fois la première colonne à la $(j+1)$-ième colonne

$$\begin{aligned} \det(D) &= (a_1 + \cdots + a_n) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 & -a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \dots a_n & -a_n \end{vmatrix} \\ &= (a_1 + \cdots + a_n)(-1)^n a_1 \cdots a_n. \end{aligned}$$