Faculté des Sciences
Aix*Marseille Université

Licence de mathématiques, 2e année
Algèbre Linéaire 2 (MAT06)

Partiel 2
Jeudi 6 décembre 2012

☒ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Deux heures, ni calculatrices, ni documents

Enseignants : T. Coulbois, F. Palesi, H. Short

Exercice 1. (Cours, 6 points)

(1) Donner la définition du déterminant d'un endomorphisme f sur un espace vectoriel V de dimension n.

(2) Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de V, donner la définition de la base duale $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$.

(3) Montrer que si f est une forme k-linéaire alternée sur V, et $(x_1, \ldots, x_k)$ est une famille liée alors $f(x_1, \ldots, x_k) = 0$.

Exercice 2 (Interpolation de Lagrange)**.**
Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On considère les formes linéaires $\phi_i : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ par $\phi_1(P) = P(1)$, $\phi_2(P) = P(2)$ et $\phi_3(P) = P(3)$ pour tout polynôme $P \in E$.

(1) Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, exprimer $\phi_1(P), \phi_2(P)$ et $\phi_3(P)$ en fonction de a, b et c.

(2) On considère la base $\mathcal{B} = (X^2, X, 1)$ de $\mathbb{R}_2[X]$, donner les matrices des formes linéaires ϕ_i dans cette base.

(3) Montrer que la famille (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) est une base de E^*.

(4) Soit (Q_1, Q_2, Q_3) la base antéduale de (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3). Exprimer $Q_i(j)$ pour $i = 1, 2, 3$ et $j = 1, 2, 3$.

(5) Calculer les polynômes Q_1, Q_2 et Q_3.

(6) Montrer qu'il existe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout polynôme P on a :

$$\int_0^1 P(t)\, dt = \alpha_1 P(1) + \alpha_2 P(2) + \alpha_3 P(3)$$

(7) Calculer α_1, α_2 et α_3.

(8) Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ on a

$$P = P(1)Q_1 + P(2)Q_2 + P(3)Q_3$$

Problème

Première partie.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 2$. On définit la matrice de taille $n \times n$ par :

$$T_n(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & \dots & 0 \\ c & a & b & \ddots & & \vdots \\ 0 & c & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c & a \end{pmatrix}$$

Par convention on prendra $T_1(a,b,c) = a$ (c'est une matrice de taille 1). Et on notera $D_n(a,b,c) = \det(T_n(a,b,c))$.

(1) Calculer $D_1(a,b,c)$, $D_2(a,b,c)$ et $D_3(a,b,c)$.

(2) Dans le cas particulier où $b = 0$, calculer $D_n(a,0,c)$.

(3) Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a

$$D_{n+2}(a,b,c) = aD_{n+1}(a,b,c) - bcD_n(a,b,c).$$

(4) Dans le cas particulier où $a = 0$, donner la formule de $D_n(0,b,c)$ en fonction de b, c et n.

Deuxième partie.

Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, on pose $M_a = \begin{pmatrix} a & -a^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Déterminer le spectre de M_a dans $\mathbb{C}$, en déduire que M_a est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

(2) En exprimant les valeurs propres de M_a sous forme exponentielle, montrer que pour $k \in \mathbb{N}$, on a ${M_a}^{3k} = (-1)^k a^{3k} I_2$.

(3) En déduire ${M_a}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (Mettre n sous la forme $n = 3k + l$ avec $l \in \{0, 1, 2\}$)

(4) On pose $u_n = D_n(a,a,a)$ comme défini dans la première partie. Montrer que

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = {M_a}^n \cdot \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

(5) En déduire une expression de $D_n(a,a,a)$ en fonction de a et n.