Faculté des Sciences
Aix*Marseille Université

Licence de mathématiques, 2e année
Algèbre Linéaire 2 (MAT06)

☒ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Partiel 2
Jeudi 6 décembre 2012

Deux heures, ni calculatrices, ni documents

Enseignants : T. Coulbois, F. Palesi, H. Short

Exercice 1. (Cours, 6 points)

(1) Donner la définition du déterminant d'un endomorphisme f sur un espace vectoriel V de dimension n.

(2) Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de V, donner la définition de la base duale $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$.

(3) Montrer que si f est une forme k-linéaire alternée sur V, et $(x_1, \ldots, x_k)$ est une famille liée alors $f(x_1, \ldots, x_k) = 0$.

Exercice 2 (Interpolation de Lagrange)**.**
Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On considère les formes linéaires $\phi_i : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ par $\phi_1(P) = P(1)$, $\phi_2(P) = P(2)$ et $\phi_3(P) = P(3)$ pour tout polynôme $P \in E$.

(1) Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, exprimer $\phi_1(P), \phi_2(P)$ et $\phi_3(P)$ en fonction de a, b et c.

> D'après les définitions : $\phi_1(P) = a + b + c$, $\phi_2(P) = 4a + 2b + c$ et $\phi_3(P) = 9a + 3b + c$.

(2) On considère la base $\mathcal{B} = (X^2, X, 1)$ de $\mathbb{R}_2[X]$, donner les matrices des formes linéaires ϕ_i dans cette base.

> Soit $P(X) = aX^2 + bX + c \in E$ c'est-à-dire que (a, b, c) sont les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$. Alors $\phi_i(P) = P(i) = ai^2 + bi + c$. $[\phi_1]_{\mathcal{B}} = (1\ 1\ 1)$, $[\phi_2]_{\mathcal{B}} = (4\ 2\ 1)$, $[\phi_3]_{\mathcal{B}} = (9\ 3\ 1)$.

(3) Montrer que la famille (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) est une base de E^*.

> Ces trois vecteurs lignes forment une matrice de Vandermonde, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ dont le déterminant est $-(3-1)(2-1) = -2 \neq 0$, ils forment donc une base de l'espace dual E^*.

(4) Soit (Q_1, Q_2, Q_3) la base antéduale de (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3). Exprimer $Q_i(j)$ pour $i = 1, 2, 3$ et $j = 1, 2, 3$.

> Par définition de la base duale, $Q_i(j) = \phi_j(Q_i) = 1$ si $i = j$ et $Q_i(j) = \phi_j(Q_i) = 0$ sinon.

(5) Calculer les polynômes Q_1, Q_2 et Q_3.

D'après la question précédente $Q_1(1) = 1, Q_1(2) = 0$ et $Q_1(3) = 0$. Cherchons les coordonnées (a, b, c) de Q_1 dans la base $\mathcal{B}$: $Q_1(X) = aX^2 + bX + c$.

$$\left\{\begin{array}{l} a+b+c=1 \\ 4a+2b+c=0 \\ 9a+3b+c=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} a+b+c=1 & \\ 3a+b=-1 & (L_2-L_1) \\ 8a+2b=-1 & (L_3-L_1) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} a+b+c=1 & \\ 3a+b=-1 & \\ 2a=1 & (L_3-2L_2) \end{array}\right.$$

Et donc $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{5}{2}$ et $c = 3$: $\boxed{Q_1(X) = \frac{X^2}{2} - \frac{5}{2}X + 3}$.
De même pour $Q_2(X) = aX^2 + bX + c$:

$$\left\{\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ 4a+2b+c=1 \\ 9a+3b+c=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} a+b+c=0 & \\ 3a+b=1 & (L_2-L_1) \\ 8a+2b=0 & (L_3-L_1) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} a+b+c=0 & \\ 3a+b=1 & \\ 2a=-2 & (L_3-2L_2) \end{array}\right.$$

Et donc $a = -1$, $b = 4$, $c = -3$: $\boxed{Q_2(X) = -X^2 + 4X - 3}$.
Et enfin $\boxed{Q_3(X) = \frac{1}{2}X^2 - \frac{3}{2}X + 1}$.
Alternativement, nous remarquons que nous connaissons deux racines des polynômes Q_1, Q_2 et Q_3 et donc que $\mathbb{Q}_1(X) = a(X-2)(X-3)$ et $Q_1(1) = 1$ donc $\boxed{Q_1(X) = -\frac{1}{2}(X-2)(X-3)}$, de même $\boxed{Q_2(X) = -(X-1)(X-3)}$ et $\boxed{Q_3(X) = \frac{1}{2}(X-1)(X-2)}$.

(6) Montrer qu'il existe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout polynôme P on a :

$$\int_0^1 P(t)\,dt = \alpha_1 P(1) + \alpha_2 P(2) + \alpha_3 P(3)$$

Comme (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) est une base de l'espace dual E^*, toute forme linéaire sur E est une combinaison linéaire de ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3. L'intégrale est linéaire, en particulier ψ : $\left\{\begin{array}{lll} E & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \psi(P) = \int_0^1 P(t)\,dt \end{array}\right.$ est une forme linéaire sur E et donc il existe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\psi = \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2 + \alpha_3\phi_3$: pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$

$$\int_0^1 P(t)\,dt = \alpha_1 P(1) + \alpha_2 P(2) + \alpha_3 P(3)$$

(7) Calculer α_1, α_2 et α_3.

Soit $P = aX^2 + bX + c \in E$, alors

$$\int_0^1 P(t)\,dt = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = \alpha_1(a+b+c) + \alpha_2(4a+2b+c) + \alpha_3(9a+3b+c).$$

En identifiant les coefficients de a, b et c nous obtenons le système

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1+4\alpha_2+9\alpha_3=\frac{1}{3} \\ \alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3=\frac{1}{2} \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} 3\alpha_2+8\alpha_3=-\frac{2}{3} & (L_1-L_3) \\ \alpha_2+2\alpha_3=-\frac{1}{2} & (L_2-L_3) \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1 & \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \alpha_1=\frac{23}{12} \\ \alpha_2=-\frac{4}{3} \\ \alpha_3=\frac{5}{12} \end{array}\right.$$

Alternativement, en remplaçant successivement P par Q_1, Q_2 et Q_3, nous obtenons : $\alpha_i = \int_0^1 Q_i(t)\,dt$ ce qui nous donne directement les valeurs ci-dessus.

(8) Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ on a

$$P = P(1)Q_1 + P(2)Q_2 + P(3)Q_3$$

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $Q = P(1)Q_1 + P(2)Q_2 + P(3)Q_3$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 tel que $Q(1) = P(1)Q_1(1) + P(2)Q_2(1) + P(3)Q_3(1) = P(1)$, de même $Q(2) = P(2)$ et $Q(3) = P(3)$. Ces deux polynômes sont égaux en trois points distincts , ils sont donc égaux (le polynôme $P - Q$ a trois racines (1, 2 et 3) et est de degré inférieur ou égal à 2, il est donc nul).

Problème

Première partie.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 2$. On définit la matrice de taille $n \times n$ par :

$$T_n(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & \dots & 0 \\ c & a & b & \ddots & & \vdots \\ 0 & c & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c & a \end{pmatrix}$$

Par convention on prendra $T_1(a,b,c) = a$ (c'est une matrice de taille 1). Et on notera $D_n(a,b,c) = \det(T_n(a,b,c))$.

(1) Calculer $D_1(a,b,c)$, $D_2(a,b,c)$ et $D_3(a,b,c)$.

$D_1(a,b,c) = a,\ D_2(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix} = a^2 - bc$ et

$$D_3(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{vmatrix} = aD_2(a,b,c) - b\begin{vmatrix} c & b \\ 0 & a \end{vmatrix} = aD_2(a,b,c) - bcD_1(a,b,c) = a^3 - 2abc.$$

(2) Dans le cas particulier où $b = 0$, calculer $D_n(a,0,c)$.

Dans le cas où $b = 0$ la matrice est triangulaire et donc $D_n(a,0,c) = a^n$.

(3) Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a

$$D_{n+2}(a,b,c) = aD_{n+1}(a,b,c) - bcD_n(a,b,c).$$

Le calcul est le même que pour $n = 3$: en développant par rapport à la 1$^{\text{re}}$ ligne puis par rapport à la 1$^{\text{re}}$ colonne

$$D_{n+2}(a,b,c) = aD_{n+1}(a,b,c) - b\begin{vmatrix} c & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & c & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & 0 & c & a \end{vmatrix} = aD_{n+1}(a,b,c) - bcD_n(a,b,c).$$

(4) Dans le cas particulier où $a = 0$, donner la formule de $D_n(0,b,c)$ en fonction de b, c et n.

Dans le cas où $a = 0$, la formule ci-dessus devient $D_{n+2}(0,b,c) = -bcD_n(0,b,c)$ et donc par récurrence nous montrerions que

$$D_{2n}(0,b,c) = (-bc)^{n-1}D_2(0,b,c) = (-bc)^n \text{ et } D_{2n+1}(0,b,c) = (-bc)^n D_1(0,b,c) = 0.$$

Deuxième partie.

Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, on pose $M_a = \begin{pmatrix} a & -a^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Déterminer le spectre de M_a dans $\mathbb{C}$, en déduire que M_a est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Le polynôme caractéristique de M_a est $\chi_a(X) = X^2 - aX + a^2$ dont les racines sont $\mathrm{Spec}(M_a) = \{a\frac{1+i\sqrt{3}}{2}; a\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\}$. Comme $a \neq 0$ ces deux valeurs propres sont distinctes, M_a est diagonalisable.

(2) En exprimant les valeurs propres de M_a sous forme exponentielle, montrer que pour $k \in \mathbb{N}$, on a ${M_a}^{3k} = (-1)^k a^{3k} I_2$.

Soit u_+ (respectivement u_-) un vecteur propre de M_a associé à la valeur propre $a\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ (respectivement $a\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$). Alors u_+ (respectivement u_-) est un vecteur propre de ${M_a}^3$ associé à la valeur propre $(a\frac{1+i\sqrt{3}}{2})^3 = a^3(e^{\frac{i\pi}{3}})^3 = -a^3$ (respectivement $(a\frac{1-i\sqrt{3}}{2})^3 = a^3(e^{-\frac{i\pi}{3}})^3 = -a^3$). Soit P la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B}' = (u_+, u_-)$, alors $P^{-1}{M_a}^3 P = -a^3 I_2$. En multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} nous obtenons ${M_a}^3 = P(-a^3 I_2)P^{-1} = -a^3(PI_2P^{-1}) = -a^3 I_2$. Pour un entier $k \in \mathbb{N}$ nous en déduisons : ${M_a}^{3k} = (-a^3 I_2)^k = (-1)^k a^{3k} I_2$.

(3) En déduire ${M_a}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (Mettre n sous la forme $n = 3k + l$ avec $l \in \{0, 1, 2\}$)

Soit n un entier de la forme $n = 3k+l$ avec $l = 0, 1$ ou 2 (c'est-à-dire que k est la partie entière de $\frac{n}{3}$ et l le reste de la division euclidienne de n par 3). D'après la question précédente

$${M_a}^n = {M_a}^{3k+l} = {M_a}^{3k}{M_a}^l = (-1)^k a^{3k} {M_a}^l.$$

Ce qui nous donne pour les différentes valeurs de l :

$${M_a}^n = \begin{cases} (-1)^k a^{3k} I_2 \text{ pour } l = 0 \\ (-1)^k a^{3k} M_a \text{ pour } l = 1 \\ (-1)^k a^{3k} {M_a}^2 = (-1)^k a^{3k} \begin{pmatrix} 0 & -a^3 \\ a & -a^2 \end{pmatrix} \text{ pour } l = 2 \end{cases}$$

(4) On pose $u_n = D_n(a, a, a)$ comme défini dans la première partie. Montrer que

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = {M_a}^n \cdot \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

D'après la première partie $u_{n+2} = au_{n+1} - a^2 u_n$. Posons $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. Alors nous pouvons écrire sous forme matricielle

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_{n+1} - a^2 u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M_a \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = M_a \cdot X_n.$$

Par récurrence nous montrerions donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = {M_a}^n X_1$ ce qui est l'indentité proposée.

(5) En déduire une expression de $D_n(a, a, a)$ en fonction de a et n.

Du calcul de ${M_a}^n$ et de la question précédente, nous déduisons que pour tout entier $n \geq 1$,

$$D_{n+1}(a, a, a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} {M_a}^n \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{cases} (-1)^k a^{n+1} \text{ si } n = 3k \\ 0 \text{ si } n = 3k + 1 \\ (-1)^{k+1} a^n \text{ si } n = 3k + 2 \end{cases}$$