Exercice I. Le symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon. Pour $1 \leq k, \ell \leq n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on considère les matrices $E_{k,\ell} = (\delta_{i,k}\delta_{j,\ell})_{1\leq i,j\leq n}$ et $T_{k,\ell}(\lambda) = I_n + \lambda E_{k,\ell}$.

1. Écrire $E_{k,\ell}$ et $T_{k,\ell}(\lambda)$ sous forme de tableaux (avec des pointillés !).

2. Pour une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, calculer $T_{k,\ell}(\lambda)A$ et $AT_{k,\ell}(\lambda)$.

3. En déduire qu'ajouter un multiple d'une ligne (ou une colonne) à une autre ne change pas le déterminant.

Exercice II. Multilinéarité. Soit $a_1, a_2 \dots, a_n, b_1, b_2 \dots, b_n$ des scalaires. Soit la matrice $B = (\delta_{ij} + a_i b_j)_{1\leq i,j\leq n}$ (où δ_{ij} est le symbole de Kronecker). On pose $a = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

1. Montrer que $\det B = \det I + \sum \det(e_1, \dots, e_{j-1}, b_j a, e_{j+1}, \dots, e_n)$.

2. Déduire que $\det B = 1 + \sum a_j b_j$

Exercice III. On dit qu'une matrice est antisymétrique si ${}^tM = -M$. Soit A une matrice antisymétrique de taille n.

1. Montrer que si n est impair, alors $\det(A) = 0$.

2. Donner un exemple avec n pair et $\det(A) \neq 0$.

Exercice IV. **1.** Faire des opérations sur les lignes pour passer de la matrice

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix} \text{ à la matrice } C' = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_2 - a_1 & \dots & a_2 - a_1 \\ 0 & 0 & a_3 - a_2 & \dots & a_3 - a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n - a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

2. En déduire le déterminant de C.

Exercice V. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit $A' = (a'_{ij})$ avec $a'_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$ Montrer que $\det(A) = \det(A')$.

Exercice VI. Determinant par bloc Soit A une matrice de taille n.

1. Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} = \det(A)$.

2. Montrer que si $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ on a $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B)$

3. Montrer que si $D \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, on a $\det \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B)$

4. Si A et B sont de taille n alors $\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A + B)\det(A - B)$.

Exercice VII. **1.** Calculer $\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$

2. Montrer que $a = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ est valeur propre de $D = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & 0 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & 0 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots a_n & 0 \end{pmatrix}$.

3. Calculer $\det(D)$.

Exercice VIII. Matrice compagnon. Calculer le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$.

Exercice IX. **Déterminant de Vandermonde.** Calculer $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & {a_1}^2 \dots & {a_1}^{n-1} \\ 1 & a_2 & {a_2}^2 \dots & {a_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & {a_n}^2 \dots & {a_n}^{n-1} \end{vmatrix}$.

(Poser $X = a_n$: le déterminant est un polynôme de degré $n-1$ en X qui s'annule en chacun des a_i pour $0 < i < n$ donc de la forme $K \prod_{i=1}^{n-1} (X - a_i)$ avec K une constante à calculer.)

Exercice X. $\det \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b & b \\ c & a & b & \dots & b & b \\ c & c & a & \dots & b & b \\ \vdots & & & \vdots & & \\ c & c & c & \dots & a & b \\ c & c & c & \dots & c & a \end{pmatrix}$

(Ajouter X partout, et montrer que le déterminant est un polynôme de degré 1 en X.)

Exercice XI. Calculer le déterminant de $G = (\sin(i+j))_{1 \leq i,j \leq n}$. *Vous pourrez remarquer que la j-ème colonne est* $\cos(j) \begin{pmatrix} \sin(1) \\ \sin(2) \\ \vdots \\ \sin(n) \end{pmatrix} + \sin(j) \begin{pmatrix} \cos(1) \\ \cos(2) \\ \vdots \\ \cos(n) \end{pmatrix}$.

Exercice XII. Soit $H = (\text{pgcd}(i,j))_{1 \leq i,j \leq n}$.

1. Montrer que pour tout entier m, $\sum_{k|m} \varphi(k) = m$ où φ est l'indicatrice d'Euler : $\varphi(n)$ est le nombre d'éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2. Soient $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $C = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $b_{ij} = \begin{cases} \varphi(j) \text{ si } j \mid i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ et $c_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i \mid j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ Calculer BC.

3. Déduire $\det(H)$ des questions précédentes.

Exercice XIII. Soit M un matrice carrée de taille n à coefficient entier. On suppose que M est inversible.

Montrer que M^{-1} est à coefficients entiers si et seulement si $\det(M) \in \{-1, 1\}$

Exercice XIV. On note com(M) la comatrice de M.

1. Calculer det(com(M)) en fonction de $\det(M)$.

2. Calculer com(com(M)) dans le cas où M est inversible.

Exercice XV. Soit A et B deux matrices carrées de taille n.

1. Montrer que si A et B sont inversibles on a $\mathrm{com(AB)} = \mathrm{com(A)com(B)}$.

2. Montrer que pour tout $\lambda \notin \mathrm{Spec(A)} \cup \mathrm{Spec(B)}$, on a $\mathrm{com((A - \lambda I_n)(B - \lambda I_n))} = \mathrm{com(A - \lambda I_n)com(B - \lambda I_n)}$.

3. En déduire que $\mathrm{com(AB)} = \mathrm{com(A)com(B)}$ (en remarquant que les coefficients des matrices de la question précédente sont polynomiaux en λ.)

4. Montrer que si A et B sont semblables alors com(A) et com(B) sont semblables.

Exercice XVI. **Déterminant circulant.** Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer le polynôme caractéristique de J, ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

Soit $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_n & a_0 & \dots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$.

2. Montrer que $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ est valeur propre de A.

3. Montrer que $A = a_o I_n + a_1 J + \cdots + a_{n-1} J^{n-1}$.

4. En déduire que les vecteurs propres de J sont aussi des vecteurs propres de A.

5. Conclure que A est diagonalisable et donner ses valeurs propres et son déterminant.

Exercice XVII. Soit A et B deux matrices carrées.

1. Montrer que trace(AB) =trace(BA).

2. Montrer que les polynômes caractéristiques satisfont $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Indications : methode 1 : Le montrer d'abord pour A inversible.

methode 2 : Écrire un polynome caractéristique sur $\mathbb{C}$ $\chi_M = \prod(\lambda_i - X)$, et les coefficients sont determinés par les sommes $\sum \lambda_i^k$, pour $k = 1, \dots n = Trace(M^k)$; Montrer que $Trace((AB)^k) = Trace((BA)^k)$.

Exercice XVIII. Soit $E = C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions défines et continues sur $\mathbb{R}^+$.

1. Montrer que l'application Φ définie par $\Phi(f) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ est un endomorphisme de E.

2. Déterminer les valeurs propres de Φ.

(Ecrire $\lambda f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ *; montrer que* 0 *n'est pas une valeur propre ; montrer que les fonctions propres sont differentiables, et après dérivation considérer les deux cas* $\lambda = 1$ *et* $\lambda \neq 1$.*)*

Exercice XIX. Soient f, g deux endomorphismes qui commutent.

1. Montrer que tout sous–espace propre de f est stable par g.

2. Montrer que si g est diagonalisable, alors la restriction de g à un sous-espace stable est diagonalisable. *(Utiliser le polynôme annulateur.)*

3. Montrer que si f et g sont diagonalisables, alors ils sont diagonalisables dans la même base.

4. Montrer que si f et g commutent et sont trigonalisables alors ils sont trigonalisables dans la même base.

Montrer que ${}^t f$ *et* ${}^t g$ *ont un vecteur propre commun dont l'orthogonal est stable par* f *et* g. *Conclure par récurrence.*