Faculté des Sciences
Aix*Marseille Université

Licence de mathématiques, 2e année
Algèbre Linéaire 2 (MAT06)

Devoir à la maison
Jeudi 24 octobre 2013

☐ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Enseignants : T. Coulbois, F. Palesi

Vous porterez une attention particulière sur la rédaction.

Exercice I. Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} -m+6 & -2m+6 & -2m+8 \\ m-1 & 2m-1 & 2m-2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que 2 est valeur propre de A_m. Donner un vecteur propre associé à la valeur propre 2.
2. Calculer le polynôme caractéristique $\chi_m(X)$ de A_m.
3. Vérifier que 1 est racine et factoriser $\chi_m(X)$.
4. Déterminer le spectre de A_m.
5. Si $m \neq 1, 2$ montrer que A_m est diagonalisable.
6. Si $m = 2$, donner la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 2. En déduire que A_2 est diagonalisable.
7. Donner une matrice de passage P telle que $P^{-1}A_2P$ est diagonale.

Exercice II. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que

$$f(x,y) = (2x+y, x+y).$$

1. Soit $u = (a,b)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ dont les deux coordonnées sont positives et d'abscisse non-nulle. Soit $(a',b') = f(a,b)$.
a. Exprimer $\frac{b'}{a'}$ en fonction de $\frac{b}{a}$.
b. En déduire que $0 \leq \dfrac{b}{a} \leq \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{b'}{a'} \leq \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.
c. De même montrer que

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq \frac{b'}{a'}.$$

2. Dessiner (sur un même dessin) : $f(1,0)$, $f(0,1)$, $f^2(1,0)$, $f^2(0,1)$,$f^3(1,0)$, $f^3(0,1)$,$f^4(1,0)$ et $f^4(0,1)$.
3. Soit (a,b) et (c,d) deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ à coordonnées strictement positives. Soit $(a',b') = f(a,b)$ et $(c',d') = f(c,d)$.
a. Montrer que

$$\left|\frac{d'}{c'} - \frac{b'}{a'}\right| \leq \frac{1}{4}\left|\frac{d}{c} - \frac{b}{a}\right|.$$

b. En déduire que les suites des coefficients directeurs des vecteurs $f^n(1,0)$ et $f^n(0,1)$ convergent vers $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
4. Donner la matrice de f dans la base canonique.
5. Donner les valeur propre dominante de f et un vecteur propre associé.