Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Licence de mathématiques, 2e année
Algèbre Linéaire 2 (MAT06)

Deux heures, ni calculatrices, ni documents

Partiel 1
Jeudi 17 octobre 2013

☒ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Enseignants : T. Coulbois, F. Palesi

Exercice 1. (Cours, 6 points) Soit $f : V \to V$ un endomorphisme linéaire d'un espace vectoriel V de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

(1) Donner la définition de famille libre, de famille génératrice et de base.
(2) Donner la définition de valeur propre et de vecteur propre
(3) Soit $f : E \to E$ un endomorphisme. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si il existe une base de E formée de vecteurs propres.

Exercice 2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -8 & 3 \end{pmatrix}$

(1) Calculer $\det(A)$. La matrice A est-elle inversible ?
(2) Montrer que le vecteur $(1, 1, 1)$ est vecteur propre de A. En déduire que -1 est valeur propre de A.
(3) Calculer le polynôme caractéristique de A. En déduire que A est diagonalisable.
(4) Déterminer D une matrice diagonale et P inversible tels que $A = PDP^{-1}$ (c'est à dire diagonaliser A)
(5) Montrer que pour tout n, les valeurs propres de A^n sont des valeurs propre de A.
(6) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Tournez la page SVP.

Problème

Première partie.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme de E, tel que pour tout $x \in E$, $f(f(x)) = f(x)$. (Autrement dit, $f \circ f = f$.)

(1) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f, alors $\lambda \in \{0, 1\}$.

(2) Identifier les sous-espaces propres $V_0(f)$ et $V_1(f)$ avec le noyau et l'image de f.

(3) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$.

(4) Montrer que f est diagonalisable.

Deuxième partie.

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. Soit $\theta : E \to E$ définie par $\theta(P) = Q$ avec :

$$Q(X) = \frac{1}{2}(P(X) + P(2 - X))$$

(Attention, ici $P(2 - X)$ désigne le polynôme P évalué en $2 - X$ et non pas un produit)

(1) Montrer que θ est un endomorphisme de E.

(2) Ecrire la matrice de θ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, que l'on notera A.

(3) Calculer A^2. En utilisant la première partie, en déduire que θ est diagonalisable.

(4) Donner une base de $\mathrm{Ker}(\theta)$ et $\mathrm{Im}(\theta)$