**Corrigé de l'exercice 1** 1) Soit $A = \begin{pmatrix} d_{1,1} & & \\ & \ddots & \\ & & d_{n,n} \end{pmatrix}$ une matrice diagonale.

a) Si $A$ a tous ses coefficients diagonaux non nuls, alors on pose $B = \begin{pmatrix} 1/d_{1,1} & & \\ & \ddots & \\ & & 1/d_{n,n} \end{pmatrix}$ et on vérifie que $AB = BA = Id_n$.

b) Si $A$ a un coefficient $d_{i,i}$ nul, alors la ligne $i$ de $A$ est nulle. On en déduit que pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la ligne $i$ de $AB$ est nulle et donc on ne peut avoir $AB = Id_n$ (car la matrice $Id_n$ n'a aucune ligne nulle). Ainsi, $A$ n'est pas inversible.

2) Appliquons l'algorithme d'échelonnement à $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Considérons la première colonne. Comme $a_{1,1} \neq 0$, on peut se servir de $a_{1,1}$ comme pivot pour annuler les coefficients situés au dessous. Plus précisément, on multiplie la matrice $A$ par la matrice

$$E_1 = T_{n,1}(-a_{n,1}/a_{1,1}) \dots T_{2,1}(-a_{2,1}/a_{1,1}),$$

de sorte que

$$E_1 A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On a utilisé qu'il n'y avait que des 0 à droite de $a_{1,1}$ si bien que seule la première colonne est modifiée. De plus, $E_1$ est triangulaire inférieure et inversible comme produit de matrices triangulaires inférieures inversibles.
Montrons par récurrence sur $1 \leq k \leq n$ qu'il existe une matrice triangulaire inférieure inversible $E_k$ telle que $E_k A$ vérifie

$$c_l(E_k A) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_{l,l} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ pour tout } 1 \leq l \leq k, \text{ et } c_l(E_k A) = c_l(A) \text{ pour tout } k+1 \leq l \leq n. \tag{1}$$

On a montré que le résultat était vrai pour $k = 1$. Supposons-le vrai pour $k \leq n-1$ et montrons-le pour $k+1$. Par hypothèse de récurrence, il existe une matrice triangulaire inférieure inversible $E_k$ telle que $E_k A$ vérifie (1). On échelonne la colonne $k+1$. Comme $a_{k+1,k+1} \neq 0$, il constitue un pivot à partir duquel on peut annuler les coefficients au-dessous. Plus précisément, on multiplie la matrice $E_k A$ par la matrice

$$F_k = T_{n,k+1}(-a_{n,k+1}/a_{k+1,k+1}) \dots T_{k+2,k+1}(-a_{k+2,k+1}/a_{k+1,k+1}),$$

de sorte que $F_k E_k A$ vérifie (1) en y remplaçant $k$ par $k+1$. Ici, on utilise que

- il n'y a que des 0 à droite de $a_{k+1,k+1}$ de sorte que les colonnes à droite de la colonne $k+1$ ne sont pas modifiées,
- il n'y a que des 0 à gauche de $a_{k+1,k+1}$ de sorte que les colonnes à gauche de la colonne $k+1$ ne sont pas modifiées.

De plus, la matrice $E_{k+1}$ définie par $E_{k+1} = F_k E_k$ est triangulaire inférieure et inversible comme produit de matrices triangulaires inférieures inversibles.
La propriété est donc vraie pour tout $k$, en particulier pour $k = n$. On a ainsi trouvé une matrice triangulaire inversible $E_n$ telle que $E_n A$ soit la diagonale de $A$. On introduit alors la matrice diagonale $D$ dont les éléments diagonaux sont les inverses des éléments diagonaux de $A$. Alors $DE_n A = Id_n$ et comme $DE_n$ est inversible, on en déduit que $A$ est inversible, d'inverse $DE_n$. La matrice $DE_n$ est bien triangulaire inférieure.
3) La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure mais pas échelonnée.
4) Considérons pour commencer une matrice triangulaire supérieure inversible. Alors toutes ses colonnes sont pivotales. On vérifie par récurrence que pour tout $1 \leq i \leq n$, la ligne $i$ a son premier élément non nul sur la colonne $i$ et donc la matrice a tous ses éléments diagonaux non nuls.
Lorsque la matrice est triangulaire inférieure, on applique le résultat précédent à sa transposée et on utilise que

- une matrice carrée est inversible si et seulement si sa transposée est inversible,
- une matrice carrée et sa transposée ont les mêmes coefficients diagonaux.

5) La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ convient (par exemple parce que son déterminant est non nul).

**Corrigé de l'exercice 2 Première partie**

1. $L_1 = 1$ et $S_1 = 1$. $L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ et $S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

$L_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ et $S_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}$

Les triangles de Pascal apparaissent sur les lignes des matrices triangulaires $L_n$ et sur les antidiagonales des matrices $S_n$.

2. On vérifie par le calcul que $L_n U_n = S_n$ pour $n = 1, 2, 3$ et 4

3.

$L_4^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 \\ 8 & 12 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ et $L_4^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 1 & 0 \\ 27 & 27 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad L_4 \boldsymbol{v}(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \boldsymbol{v}x \\ (1+x)^2 \\ (1+x)^3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{v}(1+x)$

Montrons par récurrence que $L_4^k(x) = \boldsymbol{v}(k+x)$

C'est vrai pour $k = 1$. On suppose que c'est vrai jusqu'au rang $k-1$. On écrit alors $L_4^k \boldsymbol{v}(x) = L^4 L_4^{k-1} \boldsymbol{v}(x) = L^4 \boldsymbol{v}(k-1+x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+k-1+x \\ (1+k-1+x)^2 \\ (1+k-1+x)^3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{v}(k+x)$.

On a ainsi obtenu que

$$L_4^k \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ k+x \\ (k+x)^2 \\ (k+x)^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ k+x \\ k^2 + 2x + x^2 \\ k^3 + 3k^2 x + 3kx^2 + x^3 \end{bmatrix}$$

Pour en déduire $L_4^k$, on observe que $L_4^k$ est triangulaire inférieure comme produit de matrices triangulaires inférieures. On obtient alors par identification (en utilisant que deux polynômes sont égaux si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux)

$$L_4^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 \\ k^2 & 2 & 1 & 0 \\ k^3 & 3k^2 & 3k & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Quand on multiplie $A$ à gauche par $E_4$, on retranche à chaque ligne la ligne précédente.

On a donc $E_4 L_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

5. La matrice augmentée $\begin{bmatrix} A & Id \end{bmatrix}$ s'écrit : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\ell_2 \to \ell_2 - \ell_1 \\ \ell_3 \to \ell_3 - \ell_1 \\ \ell_4 \to \ell_4 - \ell_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[\substack{\ell_3 \to \ell_3 - 2\ell_2 \\ \ell_4 \to \ell_4 - 3\ell_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_4 \to \ell_4 - 3\ell_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

**Deuxième partie** *(plus difficile…)*

6. (a) Comme $A_i \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, $B_i \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$, $C_i \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})$ et $D_i \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ les produits sont bien définis et on a : $A_1 A_2 \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, $B_1 C_2 \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, $A_1 B_2 \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$, $B_1 D_2 \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$, $C_1 A_2 \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})$, $D_1 C_2 \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})$, $C_1 B_2 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $D_1 D_2 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

(b) Par définition,

$$(M_1M_2)_{i,j} = \sum_{k=1,n} (M_1)_{i,k}(M_2)_{k,j} = \sum_{k=1,m} (M_1)_{i,k}(M_2)_{k,j} + \sum_{k=m+1,n} (M_1)_{i,k}(M_2)_{k,j}$$

Pour $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, m$ on a donc :

$$(M_1M_2)_{i,j} = \sum_{k=1,m} (A_1)_{i,k}(A_2)_{k,j} + \sum_{k=m+1,n} (B_1)_{i,k}(C_2)_{k,j} = (A_1A_2)_{i,j} + (B_1C_2)_{i,j}$$

Pour $i = 1, \dots, m$ et $j = m+1, \dots, n$ on a :

$$(M_1M_2)_{i,j} = \sum_{k=1,m} (A_1)_{i,k}(B_2)_{k,j} + \sum_{k=m+1,n} (B_1)_{i,k}(D_2)_{k,j} = (A_1A_2)_{i,j} + (B_1D_2)_{i,j}$$

Pour $i = m+1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, m$ on a :

$$(M_1M_2)_{i,j} = \sum_{k=1,m} (C_1)_{i,k}(A_2)_{k,j} + \sum_{k=m+1,n} (D_1)_{i,k}(C_2)_{k,j} = (C_1A_2)_{i,j} + (D_1C_2)_{i,j}$$

Et enfin pour $i = m+1, \dots, n$ et $j = m+1, \dots, n$ on a :

$$(M_1M_2)_{i,j} = \sum_{k=1,m} (C_1)_{i,k}(B_2)_{k,j} + \sum_{k=m+1,n} (D_1)_{i,k}(D_2)_{k,j} = (C_1B_2)_{i,j} + (D_1D_2)_{i,j}$$

7. (a) Lorsqu'on multiplie $A$ à gauche par $E_n$, on retranche à chaque ligne $i$ la ligne $i-1$ pour $i \geq 2$ et on ne fait rien à la ligne 1.
(b) On en déduit que pour $i \geq 2$, $(E_nL_n)_{i,j} = (L_n)_{i,j} - (L_n)_{i-1,j} = (L_n)_{i-1,j-1}$ par définition de $L_n$. On en déduit que $E_nL_n = \begin{bmatrix} 1 & O_{1,n-1} \\ O_{n-1,1} & L_{n-1} \end{bmatrix}$. La tranposée de cette égalité nous donne $U_nE_n^t = \begin{bmatrix} 1 & O_{1,n-1} \\ O_{n-1,1} & U_{n-1} \end{bmatrix}$.
8. (a) Lorqu'on multiplie $A$ à droite par $E_n^t$, on retranche à chaque colonne $i$ la colonne $i-1$, pour $i \geq 2$, et on ne fait rien à la première colonne.
(b) On a donc $(E_nS_n)_{i,j} = (S_n)_{i,j} - (S_n)_{i-1,j}$ pour $i = 2$ à $n$ et $j = 2$ à $n$, et $(E_nS_nE_n^t)_{i,j} = (E_nS_nE_n^t)_{i,j} - (E_nS_nE_n^t)_{i,j-1} = (S_n)_{i,j} - (S_n)_{i-1,j} - (S_n)_{i,j-1} + (S_n)_{i-1,j-1} = (S_n)_{i-1,j-1}$ (par définition de $S_n$) pour $i = 2$ à $n$ et $j = 2$ à $n$.
(c) Comme la première ligne de $E_nS_nE_n^t$ est $(1, 0, \dots, 0)$, on en déduit que

$$E_nS_nE_n^t = \begin{bmatrix} 1 & O_{1,n-1} \\ O_{n-1,1} & S_{n-1} \end{bmatrix}.$$

9. On fait l'hypothèse de récurrence suivante :

$$\text{(HR)} \qquad \text{Pour tout } k = 1, \dots, n-1, \; L_kU_k = S_k$$

(a) On a vu à la partie I que 'hypothèse (HR) est bien vérifiée pour $n = 2, 3, 4$ et 5.
(b) $E_nL_nU_nE_n^t = E_nL_n(E_nL_n)^t = \begin{bmatrix} 1 & O_{1,n-1} \\ O_{n-1,1} & L_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & O_{1,n-1} \\ O_{n-1,1} & U_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & O_{1,n-1} \\ O_{n-1,1} & S_{n-1} \end{bmatrix}$ par hypothèse de récurrence.
(c) On a donc $E_nS_nE_n^t = \begin{bmatrix} 1 & O_{1,n-1} \\ O_{n-1,1} & S_{n-1} \end{bmatrix} = E_nL_nU_nE_n^t$ ; en multipliant à gauche par $(E_n)^{-1}$ et à droite par$((E_n)^t)^{-1}$ , on obtient : $S_n = L_nU_n$.