Université d'Aix Marseille 1 - Licence de Mathématiques
PEIP Mathématiques générales 2
Février 2010 Devoir maison n0 1.

Exercice 1 (Quelques réflexions sur les matrices)

1) Soit A une matrice diagonale. Montrer que A est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.
2) Soit A une matrice triangulaire inférieure dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls. En appliquant l'algorithme de Gauss Jordan à A, montrer que A est inversible et que son inverse est triangulaire inférieure.
3) Est-ce que toutes les matrices triangulaires supérieures sont échelonnées ?
4) On verra au chapitre 3 qu'une matrice carrée échelonnée est inversible si et seulement si elle n'a que des colonnes pivotales. En déduire qu'une matrice triangulaire inversible a tous ses éléments diagonaux non nuls.
5) Donner un exemple d'une matrice inversible qui n'a que des 0 sur la diagonale.

Exercice 2 (Matrices de Pascal) *Dans ce problème, certaines questions sont plus difficiles que d'autres... si vous n'arrivez pas à résoudre une des questions posées, écrivez explicitement que vous admettez le résultat de la question, que vous pourrez librement utiliser par la suite.*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit les matrices L_n et S_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
– La matrice L_n est une matrice $n \times n$ triangulaire inférieure dont les coefficients sont définis par :

$$\ell_{i,i} = \ell_{i,1} = 1 \text{ pour tout } i = 1, \ldots, n,$$
$$\ell_{i,j} = \ell_{i-1,j} + \ell_{i-1,j-1} \text{ pour } 1 < j < i, i = 2, \ldots, n.$$

– La matrice S_n est une matrice $n \times n$ symétrique dont les coefficients sont définis par :

$$s_{1,i} = s_{i,1} = 1 \text{ pour tout } i = 1, \ldots, n,$$
$$s_{i,j} = s_{i,j-1} + s_{i-1,j} \text{ pour } 1 < j \leq i, i = 2, \ldots, n.$$

Première partie
1. Donner explicitement les matrices L_n et S_n pour $n = 1, 2, 3$ et 4. Où se cachent les triangles de Pascal ?

2. Soit $U_n = L_n^t$. Calculer L_nU_n pour $n = 1, 2, 3$ et 4.

3. Calculer L_4^2 et L_4^3.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $\boldsymbol{v}(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$. Calculer $L_4^2\boldsymbol{v}(x)$ et $L_4^3\boldsymbol{v}(x)$. Montrer que $L_4\boldsymbol{v}(x) = \boldsymbol{v}(1+x)$ et en déduire par récurrence une formule qui donne $(L_4)^k$, pour $k \in \mathbb{N}$.

4. Soit $E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.
Quelle est la manipulation effectuée sur les lignes d'une matrice A lorqu'on multiplie celle-ci à gauche par E_4 ? Calculer E_4L_4.

5. Calculer L_4^{-1} par l'algorithme de Gauss-Jordan.

Deuxième partie *(plus difficile. . .)*
Le but de cette partie est de montrer qu'on a $S_n = L_nU_n$ pour tout n. La démonstration se fait par récurrence sur n. Dans ce but, il est commode d'introduire la multiplication des matrices par blocs.

6. Soit M_1 et M_2 des matrices $n \times n$ avec $n = m + p$ composées de quatre “blocs”, qui sont eux mêmes des matrices :

$$M_1 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}$$

avec $A_i \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, $B_i \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$, $C_i \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})$ et $D_i \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

(a) Vérifier qu'on a bien le droit d'effectuer les produits A_1A_2, B_1C_2, A_1B_2, B_1D_2, C_1A_2, D_1C_2, C_1B_2, D_1D_2
(b) Montrer que

$$M_1M_2 = \begin{bmatrix} A_1A_2 + B_1C_2 & A_1B_2 + B_1D_2 \\ C_1A_2 + D_1C_2 & C_1B_2 + D_1D_2 \end{bmatrix}$$

7. Soit $E_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par $E_n = (\varepsilon_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ avec :

$$\varepsilon_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ -1 & \text{si } j = i-1, \\ 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

(a) Quelle manipulation fait-on sur les lignes d'une matrice A lorqu'on multiplie celle ci à gauche par E_n ?
(b) En déduire que

$$E_nL_n = \begin{bmatrix} 1 & O_{1,n-1} \\ O_{n-1,1} & L_{n-1} \end{bmatrix} \text{ et } U_nE_n^t = \begin{bmatrix} 1 & O_{1,n-1} \\ O_{n-1,1} & U_{n-1} \end{bmatrix},$$

où $O_{1,n-1}$ et $O_{n-1,1}$ sont les matrices nulles de $\mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ respectivement.

8. (a) Quelle est la manipulation effectuée sur les colonnes d'une matrice A lorqu'on multiplie celle ci à droite par E_n^t ?

(b) Calculer $(E_nS_n)_{i,j}$ pour $i = 2$ à n et $j = 2$ à n, et en déduire que $(E_nS_nE_n^t)_{i,j} = (S_n)_{i-1,j-1}$ pour $i = 2$ à n et $j = 2$ à n.

(c) Montrer que

$$E_nS_nE_n^t = \begin{bmatrix} 1 & O_{1,n-1} \\ O_{n-1,1} & S_{n-1} \end{bmatrix}.$$

9. On fait l'hypothèse de récurrence suivante :

$$\text{(HR)} \qquad \text{Pour tout } k = 1, \dots, n-1, \; L_kU_k = S_k$$

(a) Remarquer que l'hypothèse (HR) est vérifiée pour $n = 2, 3, 4$ et 5.
(b) Montrer que $E_nL_nU_nE_n^t = \begin{bmatrix} 1 & O_{1,n-1} \\ O_{n-1,1} & S_{n-1} \end{bmatrix}$.
(c) Montrer que $S_n = L_nU_n$.

10. Pour les braves... Le fait que $S_n = L_nU_n$ peut aussi se démontrer en utilisant les formules des coefficients C_n^k du binôme, ou encore par les graphes, voir A. Edelman, G. Strang, Pascal matrices, Amer. Math. Monthly 111 (3) (2004), accessible par google.