Université de Provence 2009-2010

Mathématiques générales II

ALGÈBRE LINÉAIRE – DEVOIR À LA MAISON 2

1. On fixe $a \in \mathbb{K}$. On considère le sous-espace vectoriel $F \subset \mathbb{K}_3[X]$ défini par

$$F = \{P \in \mathbb{K}_3[X] / P(a) = 0\}$$

   1. On note $R \subset \mathbb{K}_3[X]$ le sous-espace des polynômes constants (quelle est sa dimension ?). Vérifier que $R \cap F = \{0\}$.
   2. Montrer que $\{(X-a), (X-a)^2, (X-a)^3\} \subset F$ est libre. En déduire qu'elle forme une base de F. Montrer alors que $\mathbb{K}_3[X] = R \oplus F$.

2. Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des suites réelles vérifiant la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

   1. Montrer que $\mathcal{U}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   2. Soient α et β les racines de l'équation $x^2 = x + 1$. Vérifier que les suites géométriques $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à $\mathcal{U}$.
   3. Montrer que $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il existe λ et μ réels tels que $u_0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = \lambda\alpha + \mu\beta$.
   4. En déduire que $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de $\mathcal{U}$.

3. Soit E l'ensemble des matrices réelles de la forme :

$$\begin{pmatrix} 5\alpha+\beta+\gamma & -\alpha+\beta & -\alpha+\beta \\ -2\alpha+\beta & 4\alpha+\beta+\gamma & -2\alpha+\beta \\ -3\alpha+\beta & -3\alpha+\beta & 3\alpha+\beta+\gamma \end{pmatrix}$$

   1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel des matrices 3×3 ; donner une base de E et sa dimension.
   2. On pose :
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad Id_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   3. Calculer A^2, B^2, AB et BA.
   4. Vérifier que $AB \in$ E
   5. Montrer que $\{A, B, AB\}$ est une base de E.
   6. Montrer que E est stable pour le produit matriciel.
   7. Soit
$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$
      Montrer que $D \in$ E. Calculer D^n en fonction de D et de n.
   8. Vérifier que $D^2 + 2D - 8Id_3 = 0$. En déduire que D est régulière et calculer D^{-1}.
   9. On pose $C = A + B$. Démontrer l'existence de trois suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \geq 1$, on ait :
$$C^n = a_n A + b_n B + c_n AB$$
      Ecrire les relations de récurrence vérifiées par les trois suites. En déduire leur expression en fonction de n.