Université de Provence — 2009-2010

Licence PEIP — 1ère année-S2

Mathématiques Générales 2

Partiel n°1

Aucun document autorisé. Calculettes interdites.

Exercice 1

1. On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants:

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   Résoudre le système linéaire : $xu + yv + zw = 0$.

   L'ensemble des combinaisons linéaires de ces trois vecteurs est-il une droite, un plan ou l'espace $\mathbb{R}^3$?

2. On considère maintenant les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants:

$$u' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ v' = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ w' = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   Trouver des valeurs de x, y et z, non toutes trois nulles, telles que $xu' + yv' + zw' = 0$.

   L'ensemble des combinaisons linéaires de ces trois vecteurs est-il une droite, un plan ou l'espace $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2

Soit a un nombre réel. On étudie le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ x + 3y - 2z = 5 \\ 2x - y + az = 1 \end{cases}$$

Déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles le système :

1. admet aucune solution;
2. admet exactement une solution;
3. admet une infinité de solutions.

Dans le cas (2) et (3) on précisera la ou les solutions.

T.S.V.P.

Exercice 3

1. Soit M une matrice carrée à coéfficients réels. Montrer que :

$$Id_n - M^3 = (Id_n - M)(Id_n + M + M^2).$$

2. On considère la matrice M suivante:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer M^2 et M^3, puis M^n pour tout entier n.

   (b) En déduire que la matrice $Id_n - M$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 4

On considère la matrice A suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Soient $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
   Montrer que $AB = AC$. La matrice A peut-elle être inversible?

2. Déterminer toutes les matrices $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AF = 0$.

Exercice 5

On considère la matrice A suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, A^{-n} = (A^{-1})^n$. Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{Z}, A^p = \begin{pmatrix} 2^p & p2^{p-1} \\ 0 & 2^p \end{pmatrix}.$$

3. Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que:

$$AB = BA \Longleftrightarrow B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

4. On suppose qu'il existe B telle que $B^2 = A$. Montrer qu'alors $AB = BA$. En déduire la ou les solutions de $B^2 = A$.