Université de Provence	2009-2010
Licence PEIP	1ère année-S2

Mathématiques Générales 2

Partiel 2

Aucun document autorisé. Calculettes interdites.

Quelques rappels de cours que vous pouvez utiliser dans la suite :
1. Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont non nuls.

2. Le noyau d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est l'ensemble $\mathrm{Ker}(A) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p$ t.q. $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$. C'est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.

3. L'image d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est l'ensemble $\mathrm{Im}(A) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ t.q. $\exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p$ t.q. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\}$. C'est aussi l'ensemble des combinaisons linéaires des colonnes de la matrice A, et c'est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1
Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Le cas échéant, calculer leur inverse par l'algorithme de Gauss-Jordan (échelonnement total d'une matrice carrée).

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exercice 2
Soient a, b, c et d des nombres réels. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Les matrices E_1, E_2 et E_3 sont-elles inversibles ?
2. Calculer E_1A, E_2E_1A, $E_3E_2E_1A$.
3. En déduire que $A = LU$, où les matrices L, triangulaire inférieure, et U, triangulaire supérieure, sont à déterminer.
4. Donner quatre conditions sur a, b, c et d pour que la matrice A soit inversible.

Exercice 3
Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant votre réponse, si c'est vrai, par une démonstration, si c'est faux, par un contre exemple.

1. Si A est une matrice carrée dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1 alors A est inversible.
2. Si A est inversible alors A^{-1} et A^2 sont inversibles.
3. Si deux matrices A et B sont symétriques, alors leur produit est symétrique.
4. Si A est inversible mais n'est pas symétrique, alors A^{-1} n'est pas symétrique.
5. Si A B et C sont trois matrices symétriques alors la transposée de ABC est CBA.
6. La matrice par blocs $\begin{bmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{bmatrix}$ est forcément symétrique.
7. $\mathbb{Z}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
8. Une matrice échelonnée a partir d'une matrice à coefficients rationnels est une matrice a coefficients rationnels.
9. La transposée d'une matrice n'est jamais égale à son inverse.
10. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble des solutions d'un système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ est un espace vectoriel.

Exercice 4
Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles 2×2 et soit $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Ecrire l'élément nul O_E de E ainsi que l'élément $\frac{1}{2}A$ et l'élément $-A$.

2. Donner un exemple de sous espace vectoriel strictement inclus dans E, et non réduit au vecteur nul.

3. Décrire un sous espace vectoriel de E qui contient la matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, mais qui ne contient pas la matrice $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

4. Si un sous espace vectoriel de E contient B et C, doit-il contenir la matrice identité Id_2 ?

5. Trouver un sous espace vectoriel de E non réduit à $\{0\}$ qui ne contient aucune matrice diagonale autre que la matrice nulle.

6. Donner $\mathrm{Ker}A$ et $\mathrm{Im}A$.

Exercice 5
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(AB) \subset \mathrm{Im}(A)$.

2. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible, montrer que $\mathrm{Im}(C) = \mathbb{R}^n$.

3. Montrer que si AB est inversible (et donc $n = q$) alors $\mathrm{Im}A = \mathbb{R}^n$.

Exercice 6
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

1. On note $c_i(A)$, $i = 1, \ldots, p$ les colonnes de A et $c_i(B)$, $i = 1, \ldots, q$ celles de B. Montrer que si $c_k(B)$ est une combinaison linéaire des $k-1$ premières colonnes de B, alors $c_k(AB)$ est la même combinaison linéaire des $k-1$ premières colonnes de AB.

2. (Question plus difficile) On rappelle que pour une matrice échelonnée, une colonne pivotale est une colonne qui contient le premier terme non nul d'une ligne. Les autres colonnes sont dites non pivotales. De plus,

- une colonne non pivotale est soit nulle (c'est le cas si elle est située à gauche de la première colonne pivotale), soit combinaison linéaire des colonnes pivotales qui la précèdent,
- une colonne pivotale ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire des colonnes précédentes.

On suppose que les matrices B et AB sont échelonnées.

2.a Montrer que si la k-ième colonne de AB est pivotale, alors la k-ième colonne de A est pivotale.

2.b En déduire que le nombre de colonnes pivotales de la matrice AB est inférieur ou égal au nombre de colonnes pivotales de la matrice B.