Université de Provence 2009–2010

Mathématiques Générales II

PARTIEL D'ALGÈBRE 3

Sans documents, ni calculettes

Barême indicatif : Exo 1 : 2pts; Exo 2 : 2pts; Exo 3 : 4pts; Exo 4 : 8pts; Exo 5 : 6pts

Exercice 1 Calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 Les énoncés suivants sont-ils Vrai ou Faux ? Donner une justification de votre réponse (une réponse correcte sans justification ne sera pas prise en compte).

1. Deux espaces vectoriels de même dimension sont égaux.
2. L'espace $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes réels de degré au plus égal à trois est un espace vectoriel de dimension 3.
3. Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, si les colonnes de A forment une famille libre, alors les lignes de A forment également une famille libre.
4. L'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (y, 1, x)$ est linéaire.

Exercice 3 Soit la matrice $A \in \mathbb{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de la matrice A et la dimension de $KerA$.
2. Donner une équation cartésienne de l'image de A et une équation paramétrique du noyau de A.
3. Calculer les solutions des deux systèmes linéaires suivants :

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et la base canonique de $\mathbb{R}^3$, notée $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$.
Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à tout (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ associe

$$f(x, y, z) = (-x + y + z, \quad -6x + 4y + 2z, \quad 3x - y + z).$$

1. Calculer les trois vecteurs $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ et $\boldsymbol{v}_3$ de $\mathbb{R}^3$ respectivement égaux à $f(\boldsymbol{e}_1)$, $f(\boldsymbol{e}_2)$ et $f(\boldsymbol{e}_3)$.
2. Ecrire la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Exprimer l'image de M en fonction de $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$.
3. Montrer l'égalité $f \circ f = 2f$ et en déduire que si $v \in \mathrm{Im}f$, alors $f(\boldsymbol{v}) = 2\boldsymbol{v}$.
4. Déduire de la question précédente une valeur a réelle telle que af soit un projecteur.
5. Montrer que $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Ker}f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
6. En échelonnant la matrice M, déterminer une base de $\mathrm{Im}f$ et de $\mathrm{Ker}f$ et préciser leurs dimensions respectives.
7. Soit la famille $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, définie par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \frac{1}{2}(-\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3) \ ; \ \boldsymbol{\varepsilon}_2 = (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3) \ ; \ \boldsymbol{\varepsilon}_3 = (1, 2, -1).$$

   (a) Calculer leurs composantes dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et justifier que $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ forment une base de $\mathrm{Im}f$.

   (b) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (c) Déterminer la matrice N de f dans la base $\mathcal{B}'$.

   (d) Donner la matrice P de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et calculer son inverse. Ecrire la formule de changement de base reliant les matrices : N, M, P et vérifier que l'on retrouve la matrice obtenue à la question précédente.

Exercice 5 Soit $E = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles 2×2. On rappelle que la base canonique de E est l'ensemble des matrices :

$$\mathcal{B} = \left\{ M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

On considère l'application qui à tout élément A de l'espace vectoriel E associe la matrice $T(A) = A - A^t$.

1. Vérifier que T est une application linéaire de E dans E.
2. Quelles sont les images des matrices M_i par l'application T ? En déduire la matrice $M = M_{\mathcal{B}}(T)$ de l'application T dans la base $\mathcal{B}$.
3. Calculer le rang et la dimension du noyau de T.
4. Donner une base de $\mathrm{Ker}T$ et de $\mathrm{Im}T$.
5. On considère maintenant l'ensemble $F = \left\{ M \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) / M = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

   (a) Montrer que F est un espace vectoriel.

   (b) Déterminer une base de F et en déduire la dimension de F. On notera cette base $\mathcal{B}'$.

   (c) On considère la restriction T' de l'application T à F. Déterminer la matrice de l'application linéaire T' dans la base $\mathcal{B}'$.

   (d) Calculer le rang et la dimension du noyau de T'.

   (e) Donner une base de $\mathrm{Ker}T'$ et de $\mathrm{Im}T'$.