Université de Provence — 2009-2010
Licence PEIP — 1ère année-S2

Mathématiques Générales 2 - Deuxième session

Epreuve d'algèbre
Durée: 2h - Documents et calculette interdits

Barême indicatif: Exo 1: 3pts; Exo 2: 3pts; Exo 3: 4pts; Exo 4: 5pts; Exo 5: 5pts

Exercice 1 *Question de cours*
Soient n et p deux entiers non nuls donnés et soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Donner la définition du noyau et de l'image de la matrice A.
2. Quelle est la dimension maximale du noyau?
3. Quelle est la dimension maximale de l'image?

Exercice 2 *Question de cours*
Montrer que si A est une matrice carrée de dimension n à coefficients réels alors on a:

1. A inversible $\Longrightarrow Ker(A) = \{0\}$.
2. A inversible $\Longrightarrow Im(A) = \mathbb{R}^n$.

Exercice 3 Les énoncés suivants sont-ils Vrai ou Faux? Donner une justification de votre réponse (une réponse correcte sans justification ne sera pas prise en compte).

1. $H = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension 3.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, A et $-A$ ont toujours même forme totalement échelonnée.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\det(2A) = 2\det(A)$.
4. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 1\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
5. Une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$ a au plus quatre éléments.
6. Les plans vectoriels $\boldsymbol{x0y}$ et $\boldsymbol{x0z}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
7. Il existe une application linéaire T de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^6$ telle que $\dim\mathrm{Ker}(T) = 2$ et $\mathrm{Rg}(T) = 3$.
8. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'une espace vectoriel E qui vérifient: $dimF + dimG = dimE$ alors F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 4 On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ définie par:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A est-elle inversible?

T.S.V.P.

2. Calculer le rang de la matrice A et donner une base de l'image de A.

3. Calculer la dimension du noyau de A et donner une base de $Ker(A)$.

4. Résoudre les systèmes linéaires $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 On rappelle que la base canonique de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est:

$$\mathcal{B} = \left\{ M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

1. Vérifier que l'ensemble D des matrices réelles 2×2 diagonales est un sous espace vectoriel de l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices réelles 2×2 et donner une base de ce sous espace.

2. On considère l'application U de l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices réelles dans l'ensemble D définie par:

$$U(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & b+c \end{pmatrix}.$$

   Montrer que l'application U est linéaire.

3. Déterminer la matrice M de cette application U avec la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et la base de l'ensemble D donnée dans la question 1.

4. La matrice M est-elle échelonnée? Quel est son rang?