Notes

20-11-2020

P. Mathieu

Platonismes

L'essentiel des citations est pris de l'article 'objet et idéalités dans les mathématiques contemporaines' de F. Patras (Etudes platoniciennes, 2012).

Définition du platonisme

La croyance qu'il y a une totalité constituée [*a body* dans le texte original] d'objets mathématiques, de relations mathématiques, et de faits les concernant qui est indépendante et non affectée par les entreprises humaines pour les découvrir.
David Mumford

Position anti-platoniste de Davis

J'en conclus pour ma part que les éléments des systèmes de nombres ne peuvent être trouvés dans les nuées du paradis platonicien, mais résident dans les croyances et actions partagées d'une communauté étendue des mathématiciens.
Davis

La conclusion est très discutable : l'exemple du jeune esclave confronté au problème de la duplication du carré montre que, toutes questions ontologiques mises à part, la pensée fonctionne selon des mécanismes universels – hors de tout relativisme culturel.
Patras

Mumford attaque prioritairement la communauté des historiens des mathématiques, et deux thèses : celle du relativisme culturel et celle du contextualisme.
Pourtant, et de façon un peu plus surprenante, la même idée d'universalisme des objets et des concepts mathématiques peut être également utilisée dans une autre direction, à savoir contre une approche techniciste et formelle aux contenus scientifiques. C'est une idée que nous retrouverons, un peu plus tard, avec l'étude de Gödel.

The other aspect of Platonism [au-delà de l'assertion selon laquelle il existerait un domaine d'objets idéaux indépendant] is that it involves a definite claim about the way the human brain functions. Platonists believe that our understanding of mathematics involves a type of perception of the Platonic realm, and that our brains therefore have the capacity to reach beyond the confines of the physical world as currently understood [...] Although he is a Platonist, Roger Penrose is almost unique in accepting that his beliefs imply that the mathematical brain cannot obey the known laws of physics. » (E.B. Davies 2007).

Il faudrait poser la question à Gromov! (Cf sa réponse dans le film de Depardon).

Discussion: Hilbert, Gödel, Connes

Hilbert: Dans ses *Fondements de la géométrie*12, il avance la thèse que l'on peut dissocier entièrement la signification associée aux entités mathématiques de leur émergence dans les langages formalisés. Selon une formule restée célèbre, même si l'on décidait d'appeler « chaises » les droites ou « tables » les points de la géométrie euclidienne, de façon à priver l'esprit de toute intuition concrète des phénomènes, la théorie continuerait d'être valide. C'est là probablement le coup le plus violent jamais porté au platonisme, puisqu'il remet radicalement en cause l'idée même d'objet, pour revendiquer une autonomie et une primauté du langage, du formalisme, et des systèmes axiomatiques.

Gödel:
D'une part, qu'aucun système formel contenant l'arithmétique de Peano ne peut prouver sa propre consistance (sauf à être inconsistant : deuxième théorème d'incomplétude11).
D'autre part, qu'il existe, dans tout système formel S contenant l'arithmétique, des propositions vraies mais qui ne peuvent être démontrées dans S (en pratique, il faut ajouter de nouveaux axiomes pour qu'elles le deviennent).

Le point de vue des formalistes, à mes yeux, ne rend compte que d'un aspect des mathématiques. J'avoue être résolument platonicien et refuser de ne voir dans la fréquentation des « Êtres mathématiques » qu'une recette de chercheur. Je pense que le théorème de Gödel montre très clairement les limites du point de vue des formalistes : poussé à l'extrême, ce point de vue conduit à une impasse. Cela m'a convaincu, à cause de la nécessaire distinction entre vérité et prouvabilité, par exemple, de séparer la réalité mathématique brute [...] du système axiomatique et logico-déductif que nous élaborons pour le comprendre [...].
Je maintiens que les mathématiques ont un objet, tout aussi réel que celui des sciences [comme la géologie, la physique des particules...], mais qui n'est pas matériel, et n'est pas localisé ni dans l'espace ni dans le temps. Il a cependant une existence tout aussi ferme que la réalité extérieure, et les mathématiciens s'y heurtent un peu comme on se heurte à un objet matériel dans la réalité extérieure. Cette réalité dont je parle, du fait qu'elle n'est localisable ni dans l'espace ni dans le temps, donne, lorsqu'on a la chance d'en dévoiler une infime partie, une sensation de jouissance extraordinaire par le sentiment d'intemporalité qui s'en dégage [...].
Alain Connes

Le monde réel fait partie des maths.

Sur sa vision des maths et autres choses, cf réponses aux questions d'Alain Connes à la fin du séminaire Wright (Université de Genève, novembre 2020).

Eros

.

Ce qui fait la qualité de l'inventivité et de l'imagination du chercheur, c'est la qualité de son attention, à l'écoute de la voix des choses. Car les choses de l'Univers ne se lassent jamais de parler d'elles-mêmes et de se révéler, à qui veut les entendre.
Si j'ai pu donner ma pleine mesure dans mon travail mathématique, et produire et enfanter une œuvre et une vision vastes, puissantes et fécondes, ce n'est à rien d'autre qu'à cette fidélité que je le dois ; à cette absence de tout souci de me conformer à des normes, grâce à quoi je m'abandonne avec une totale confiance à la pulsion de connaissance originelle.
A. Grothendieck

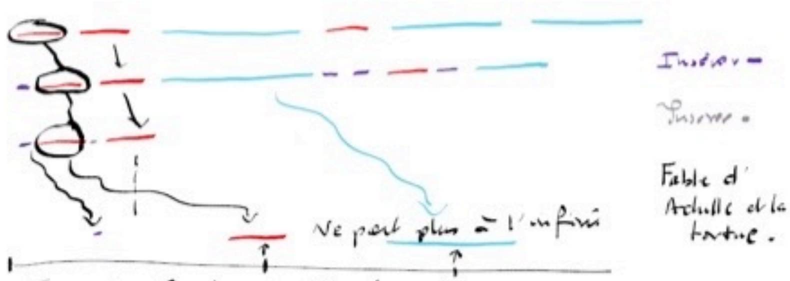
Inventer, pour moi, c'est aller au-devant de mes oeuvres. Mes oeuvres existaient avant moi, mais on ne les voyait pas parce qu'elles crevaient les yeux.
Raimond Hains

Créer un nouveau concept, découvrir la solution d'un problème difficile serait l'analogue de la procréation au niveau de l'espèce. Pour autant, comme toujours, cette première réponse platonicienne doit être nuancée : dans le *Banquet*, Diotime pense Eros non comme accomplissement, expérience du Beau, mais plutôt comme démon à mi-chemin entre le savoir et l'ignorance, transi du besoin de connaître et de faire l'expérience de la plénitude. Le *Phèdre*, qui porte sur la folie amoureuse sous ses différentes formes, de l'amour des corps à l'amour du savoir, poserait des problèmes analogues – au sens où la création mathématique est sans doute liée à une forme de possession et d'inspiration.
Patras au sujet des questions posées par la motivation des mathématicien.ne.s.

Sur les erreurs, cf l'exposé de JC Yoccoz à la Bnf: 'une erreur féconde de Poincaré'.

Celui de Y. Le Cun (IA-Facebook) aussi à la Bnf est instructif.

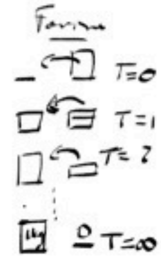
Avec des couleurs – un nombre infini
– avec des durées variables
(de plus en plus courtes)



Fable d'Achille et la tortue.

Quelle la première couleur? La première change infiniment souvent.

On a "résolu" la difficulté, en renonçant à définir la première couleur.



A · 1m T · 1/10 Remarque ×
...×

Even though both have a construction equivalent to ours, complete proofs of some key properties of the constructed process, like the Markov one, are not presented. For this reason, and in order to include the $c=0$ case as well, we present below a proof of Proposition 3.6.

The proof is based on strongly approximating $\tilde{X}^c$ in Skorohod space by Markov processes that we now define. For $n \geq 1$ and $y \in \{1,\dots,n,\infty\}$, let

$$\Gamma_n(t) = \Gamma_n^{c,y}(t) = \gamma(y)\,T_0 + \sum_{x=1}^{n} \gamma(x) \sum_{i=1}^{N_t^{(x)}} T_i^{(x)} + ct \tag{3.4}$$

and

$$\tilde{X}_n^{c,y}(t) = \begin{cases} y, & \text{if } 0 \leq t < \gamma(y)\,T_0, \\ x, & \text{if } \Gamma_n(\sigma_j^{(x)}-) \leq t < \Gamma_n(\sigma_j^{(x)}) \\ & \text{for some } 1 \leq x \leq n,\ j \geq 1, \\ \infty, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.5}$$

REMARK 3.8. We note that $\tilde{X}_n^{0,y}$ never visits ∞, even when $y=\infty$. See next remark.

REMARK 3.9. The order in which the sites of $\{1,\dots,n\}$ are visited by $\tilde{X}_n^{c,y}$ (in case y is finite, after leaving the initial state) is given by the respective (chronological) order of $\{\sigma_j^{(x)}; 1 \leq x \leq n,\ j \geq 1\}$. Let us denote the latter set by $\mathcal{S}^n = \{S_1^n, S_2^n, \dots\}$, with $S_1^n < S_2^n < \cdots$. Then $\mathcal{S}^n$ is a Poisson

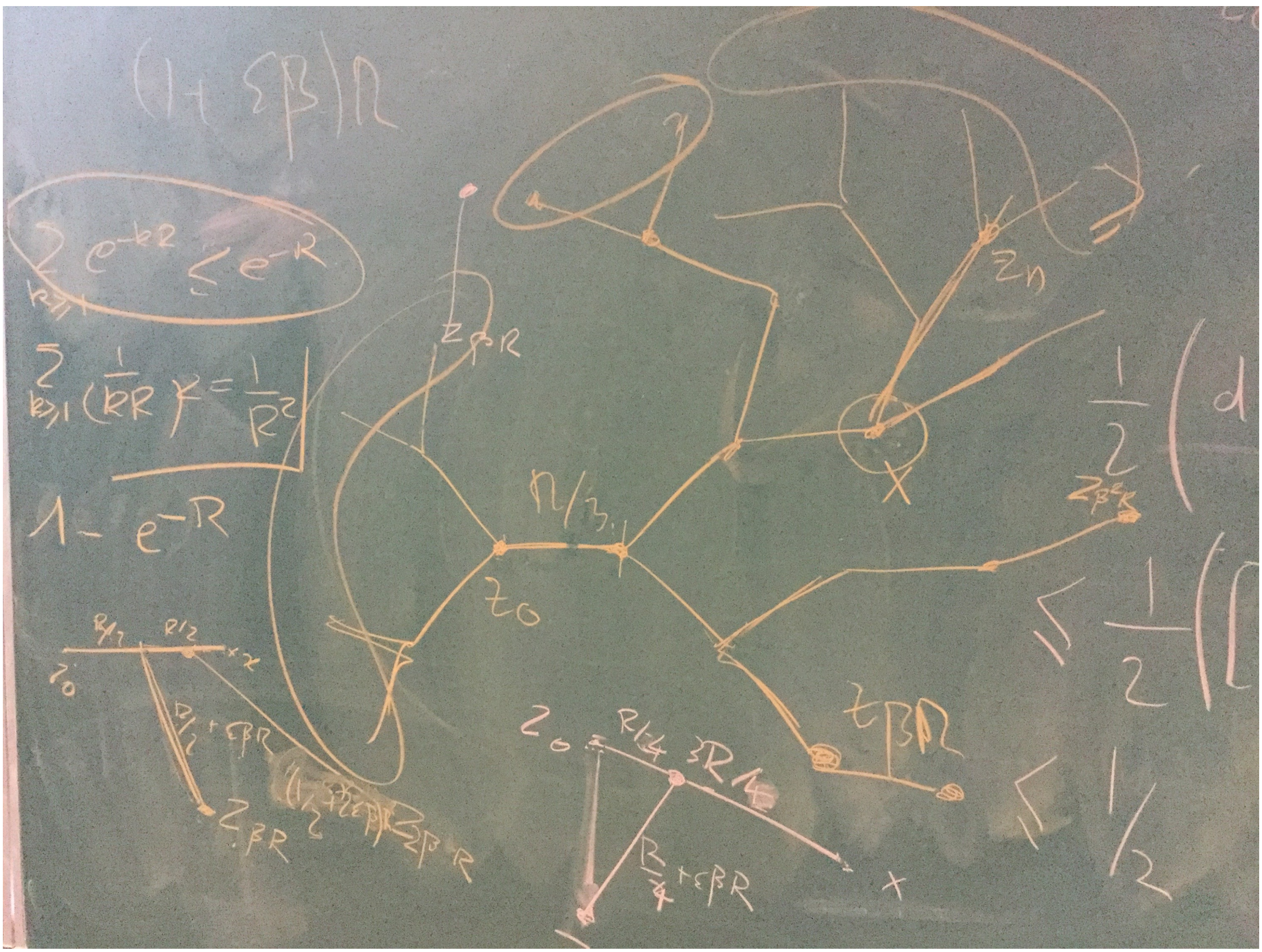
point process of rate n, each point of which is labeled according to a different element of an i.i.d. family of uniform in $\{1,\dots,n\}$ random variables. This implies that the jump probabilities of $\tilde{X}_n^{c,y}$ from any site in case $c=0$, and from ∞ in case $c>0$, are uniform in $\{1,\dots,n\}$, and also implies that $\tilde{X}_n^{0,\infty}(0)$ is uniformly distributed in $\{1,\dots,n\}$ (since it is the label of S_1^n; see previous remark).

In case $c>0$, $c(S_i^n - S_{i-1}^n)$, $i \geq 1$, where $S_0^n \equiv 0$, represent the successive holding times at ∞. It is clear then that these times form an i.i.d. sequence of exponential random variables of mean c/n.

We have the following two results.

LEMMA 3.10. *$\tilde{X}_n^c$ is càdlàg and Markovian for every $n \geq 1$ and $y \in \{1,\dots,n,\infty\}$.*

.



$(1+\varepsilon\beta)R$
$\sum_{k\geq 1} e^{-kR} \leq e^{-R}$
$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{(kR)^2} = \frac{1}{R^2}$
$1 - e^{-R}$
z_0
$R/3$
$z_{\beta R}$
z_n
x
$z_{\beta^2 R}$
$\varepsilon\beta R$
$3R/4$
$\frac{R}{4} + \varepsilon\beta R$
$\frac{1}{2}$

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.