CMA CM (chap 7)

lundi 23 novembre 2020 07:47

Th 10 ${}^{\text{Preuve}}$ Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ stochastique et primitive.

- On triangularise $A \in M_n(\underline{\mathbb{C}})$: $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \underbrace{J_{m_1}(\lambda_1)}_{J_1 :=} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \underbrace{J_{m_s}(\lambda_s)}_{J_s :=} \end{pmatrix}$$

t.q. $\forall i \in \{1,\dots,s\}$, $\underline{|\lambda_i| < 1}$ | car A est stochastique et primitive donc, d'après le th de Perron, $\rho(A) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } A \text{ est stochastique}}}{=} 1$ est une v.p. simple et dominante de A)

- $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = P \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & J_1^k & \\ 0 & & J_s^k \end{pmatrix} P^{-1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} P \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$

avec $J_1^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0_{m_1}$ car $|\lambda_1| < 1$, …, $J_s^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0_{m_s}$ car $|\lambda_s| < 1$

- De plus, $E_1 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$: on peut supposer, sans perdre de généralité, que $P = \begin{pmatrix} 1 & \\ \vdots & * \\ 1 & \end{pmatrix}$. Alors, si $P^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ & * & \end{pmatrix}$

$$P \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ & \vdots & \\ x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} =: \underbrace{L}_{\text{stochastique}} \in M_n(\mathbb{R})$$

donc $(x_1, \dots, x_n)$ est stochastique

Prop 11 ${}^{\text{Preuve}}$ • Comme A est primitive et positive, ${}^tA$ l'est également (s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tq A^N est strictement positive, alors $({}^tA)^N = {}^t(A^N)$ est strictement positive) : on peut donc appliquer le théorème de Perron à ${}^tA$. En particulier, $\rho({}^tA)$ est une v.p. simple de ${}^tA$.

$\chi_{{}^tA} = \chi_A$ … $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}({}^tA) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ donc $\rho({}^tA) = \rho(A) = 1$

• Comme $\chi_{{}^tA} = \chi_A$, ...

$\big(\det({}^tA - XI_n)$
$= \det\left[{}^t(A - XI_n)\right]$
$= \det(A - XI_n) \big)$

• De plus, par le th. de Perron appliqué à ${}^tA$, il existe $v \in E_1({}^tA)$ tq $v > 0$. On note $w = \dfrac{1}{\|v\|_1} v$: w est stochastique et $E_1({}^tA) = \mathrm{Vect}\{w\}$ (w est l'unique vecteur propre stochastique associé à la v.p. 1 de ${}^tA$).

• On montre que $w = {}^t\ell$

On a ${}^tA\, w = w$ donc, $\forall k \in \mathbb{N}$, $({}^tA)^k w = w$

$\iff {}^t(A^k)\, w = w$, $\quad A^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} L$

Ainsi ${}^tL\, w = w \iff w = {}^tL\, w$

donc $w \in \mathrm{Im}\, {}^tL = \mathrm{Im}\, ({}^t\ell \,|\, \cdots \,|\, {}^t\ell) = \mathrm{Vect}\{{}^t\ell\}$

donc $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tq $\underbrace{w = \alpha\, {}^t\ell}_{\text{stochastiques}}$

donc $w = {}^t\ell$.

Si $M = \underbrace{(C_1 | \cdots | C_n)}_{= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f)}$, $C_1 = f(e_1)$, $C_n = f(e_n)$, $[\mathrm{Im}\, M = \mathrm{Vect}\{C_1, \dots, C_n\}]$

$\mathrm{Im}\, M = \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\{f(e_1), \dots, f(e_n)\} = \mathrm{Vect}\{C_1, \dots, C_n\}$

Si $v \in \mathbb{R}^n$, $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $f(v) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) \in \mathrm{Vect}\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$.

Ex (6")

• On note $W := \{x_i, i \in I\}$ ensemble des pages web

$I = \{1, \dots, N\}$, $N > 13 \times 10^{13}$

• Si $i, j \in I$, on note $x_i \longrightarrow x_j$ si x_i contient un lien vers la page x_j.

- Si x_i contient au moins un lien, et si $x_i \longrightarrow x_j$, la proba d'aller sur la page x_j sachant que l'on est sur la page x_i est $\frac{1}{d_i}$ où d_i est le nbre de liens sur x_i.

- On pose $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{d_i} & \text{si } x_i \longrightarrow x_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour $i \in \{1, \dots, N\}$,

- si $d_i > 0$, la ligne i de A est stochastique

- Afin de rendre la mat A stochastique, on remplace chaque ligne nulle par une ligne $\left(\frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N}\right)$: on obtient une nouvelle mat $\widetilde{A}$ qui est <u>stochastique</u>

- $\widetilde{A}$ non primitive en général

$\rightsquigarrow$ pour $\alpha \in]0;1[$, on note $G_\alpha := \alpha \widetilde{A} + (1-\alpha) \underbrace{E}_{= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}$

qui est strictement positive.

$\Rightarrow$ il existe pour G_α un vecteur d'état limite.

dans la "pratique", $\alpha = 0{,}85$