CMA CM (chapitre 7)

mardi 17 novembre 2020 07:59

Th 8 Preuve

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ tq $A > 0$ et $\rho(A) = 1$

Mq i) $\rho(A) = 1 \in Sp(A)$

ii) $\exists v \in E_1 \setminus \{\vec{0}\}$ tq $v > 0$

Notations $*$ si $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, on note • $v \underset{>}{\geqslant} 0$ si $\forall i \in \{1, .., n\}$, $x_i \underset{>}{\geqslant} 0$

• $v \underset{>}{\geqslant} w$ si $v - w \underset{>}{\geqslant} 0$ $(\Leftrightarrow \forall i \in \{1,..,n\}, x_i \geqslant y_i)$

$*$ si $u = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$, on note $|u| := \begin{pmatrix} |z_1| \\ \vdots \\ |z_n| \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ $(|u| \geqslant 0)$

Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$ tq $|\lambda| = \rho(A) = 1$. Soit $u \in E_\lambda \setminus \{\vec{0}\} \subset \mathbb{C}^n$, $u = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$

But: On va montrer que $|u| = A|u|$ (et alors $\underset{\rho(A)}{1} \in Sp(A)$ et $|u| \in E_1 \setminus \{\vec{0}\} \subset \mathbb{R}^n$)

étape 1: Mq $|u| \leqslant A|u|$: on a

• $|Au| = |\lambda u| = \begin{pmatrix} |\lambda z_1| \\ \vdots \\ |\lambda z_n| \end{pmatrix} = \underbrace{|\lambda|}_{=1} \underbrace{\begin{pmatrix} |z_1| \\ \vdots \\ |z_n| \end{pmatrix}}_{=|u|} = |u|$ (1)

• pour $i \in \{1, .., n\}$, $(|Au|)_i = |(Au)_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j \right| \leqslant \sum_{j=1}^n |\overset{\in \mathbb{R}}{\underset{>0}{a_{ij}}}| |z_j| = \sum_{j=1}^n a_{ij} |z_j|$

$= (A|u|)_i$ (2)

Ainsi, $|Au| \leqslant A|u|$

$\Rightarrow |u| \overset{(1)}{=} |Au| \overset{(2)}{\leqslant} A|u|$

étape 2: Mq $|u| = A|u|$: on procède par l'absurde, en supposant qu'il existe $i_0 \in \{1, .., n\}$ tq $(|u|)_{i_0} < (A|u|)_{i_0} \Leftrightarrow (A|u| - |u|)_{i_0} > 0$

Alors $\underbrace{A}_{>0} \underbrace{\overbrace{(A|u| - |u|)}^{=: w = (w_1, .., w_n)}}_{\geqslant 0 \text{ et } (A|u| - |u|)_{i_0} > 0} > 0$

$\left(\text{si } j \in \{1, .., n\}, (Aw)_j = \sum_{i=0}^n a_{ji} w_i \right.$

$= \underbrace{\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_0}}^{n} \underbrace{a_{ji}}_{>0} \underbrace{w_i}_{\geqslant 0}}_{\geqslant 0} + \underbrace{a_{j i_0}}_{>0} \underbrace{w_{i_0}}_{>0}$

$\left. > 0 \right)$

donc $\exists \varepsilon > 0$ tq $A(A|u| - |u|) > \varepsilon A|u|$

$\Leftrightarrow A(A|u|) > (1 + \varepsilon) A|u|$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\left(\frac{1}{1+\varepsilon}A\right)}_{>0} A|u| > A|u|$$

donc $\left(\frac{1}{1+\varepsilon}A\right)\left[\left(\frac{1}{1+\varepsilon}A\right)A|u|\right] > \left(\frac{1}{1+\varepsilon}A\right)\left[A|u|\right]$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{1}{1+\varepsilon}A\right)^2 A|u| > \underbrace{\frac{1}{1+\varepsilon}\cdot A\left(A|u|\right)}_{>A|u|}$$

donc $\left(\frac{1}{1+\varepsilon}A\right)^2 A|u| > A|u|$

donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $\underbrace{\left(\frac{1}{1+\varepsilon}A\right)^k}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{} 0_n} A|u| > A|u|$

$$\rho\left(\underbrace{\frac{1}{1+\varepsilon}}_{>0}A\right) = \frac{1}{1+\varepsilon}\rho(A) = \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$$

donc $\vec{0} \geqslant A|u|$ impossible car $\begin{cases} |u| \geqslant 0 \\ u \neq \vec{0} \\ A > 0 \end{cases}$ donc $A|u| > 0$

Conclusion : $|u| = A|u| \Longleftrightarrow A|u| = |u|$ et $|u| \neq \vec{0}$ donc $1 \in Sp(A)$ et $|u| \in E_1(A)$.

De plus, $|u| = A|u| > 0$ donc $|u| \in E_1$ et $|u| > 0$