II. Normes matricielles subordonnées

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$. On construit à partir de $\|\cdot\|$ une norme matricielle $|||\cdot|||$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifie $|||I_n||| = 1$. On se base sur le résultat suivant :

Lemme 4

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n \backslash \{0\} & \to & [0, +\infty[\\ v & \mapsto & \frac{\|Av\|}{\|v\|} \end{array}$ admet un maximum, que l'on note $|||A|||$.

Remarque :

$\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), |||A||| = \max_{v \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \max_{v \in \mathbb{K}^n, \|v\|=1} \|Av\|$

II. Normes matricielles subordonnées

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$. On construit à partir de $\|\cdot\|$ une norme matricielle $|||\cdot|||$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifie $|||I_n||| = 1$. On se base sur le résultat suivant :

Lemme 4

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n \backslash \{0\} & \to & [0, +\infty[\\ v & \mapsto & \frac{\|Av\|}{\|v\|} \end{array}$ admet un maximum, que l'on note $|||A|||$.

Remarque :

$\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\ |||A||| = \max_{v \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}} \ \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \max_{v \in \mathbb{K}^n,\ \|v\|=1} \ \|Av\|$

Proposition et Définition 5

L'application $|||\cdot||| : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) & \to & [0, +\infty[\\ A & \mapsto & |||A||| \end{array}$

II. Normes matricielles subordonnées

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$. On construit à partir de $\|\cdot\|$ une norme matricielle $\|\!|\cdot|\!\|$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifie $\|\!|I_n|\!\| = 1$. On se base sur le résultat suivant :

Lemme 4

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n \backslash \{0\} & \to & [0, +\infty[\\ v & \mapsto & \frac{\|Av\|}{\|v\|} \end{array}$ admet un maximum, que l'on note $\|\!|A|\!\|$.

Remarque :

$\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), \ \|\!|A|\!\| = \max_{v \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}} \ \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \max_{v \in \mathbb{K}^n, \ \|v\|=1} \ \|Av\|$

Proposition et Définition 5

L'application $\|\!|\cdot|\!\| : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) & \to & [0, +\infty[\\ A & \mapsto & \|\!|A|\!\| \end{array}$ est une norme matricielle sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$

II. Normes matricielles subordonnées

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$. On construit à partir de $\|\cdot\|$ une norme matricielle $|||\cdot|||$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifie $|||I_n||| = 1$. On se base sur le résultat suivant :

Lemme 4

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n \backslash \{0\} & \rightarrow & [0, +\infty[\\ v & \mapsto & \frac{\|Av\|}{\|v\|} \end{array}$ admet un maximum, que l'on note $|||A|||$.

Remarque :

$\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\ |||A||| = \max_{v \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}} \ \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \max_{v \in \mathbb{K}^n,\ \|v\|=1} \ \|Av\|$

Proposition et Définition 5

L'application $|||\cdot||| : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow & [0, +\infty[\\ A & \mapsto & |||A||| \end{array}$ est une norme matricielle sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ satisfaisant $|||I_n||| = 1$.

II. Normes matricielles subordonnées

Rappel :

II. Normes matricielles subordonnées

Rappel : si $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{K}^n$,

II. Normes matricielles subordonnées

Rappel : si $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{K}^n, \|v\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |v_i|$ et

II. Normes matricielles subordonnées

Rappel : si $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{K}^n$, $\|v\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |v_i|$ et $\|v\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |v_i|$.

Rappel : si $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n, \|v\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |v_i|$ et $\|v\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |v_i|$.

Soit $A = (a_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

II. Normes matricielles subordonnées

Rappel : si $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n, \|v\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |v_i|$ et $\|v\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |v_i|$.

Soit $A = (a_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème 6

$$|||A|||_1 = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i\,j}| \text{ et}$$

II. Normes matricielles subordonnées

Rappel : si $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{K}^n, \|v\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |v_i|$ et $\|v\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |v_i|$.

Soit $A = (a_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème 6

$$|||A|||_1 = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i\,j}| \text{ et } |||A|||_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i\,j}|.$$

III. Rayon spectral

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

III. Rayon spectral

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Définition 7

On appelle <u>rayon spectral de A</u>

III. Rayon spectral

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Définition 7

On appelle rayon spectral de A la quantité $\rho(A) := \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} |\lambda|$

III. Rayon spectral

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Définition 7

On appelle rayon spectral de A la quantité $\rho(A) := \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} |\lambda| \in [0, +\infty[$.

III. Rayon spectral

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Définition 7

On appelle rayon spectral de A la quantité $\rho(A) := \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} |\lambda| \in [0, +\infty[$.

On va établir deux liens avec les normes subordonnées.

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Définition 7

On appelle rayon spectral de A la quantité $\rho(A) := \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} |\lambda| \in [0, +\infty[$.

On va établir deux liens avec les normes subordonnées. Tout d'abord :

III. Rayon spectral

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Définition 7

On appelle rayon spectral de A la quantité $\rho(A) := \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} |\lambda| \in [0, +\infty[$.

On va établir deux liens avec les normes subordonnées. Tout d'abord :

Théorème 8

Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$,

III. Rayon spectral

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Définition 7

On appelle rayon spectral de A la quantité $\rho(A) := \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} |\lambda| \in [0, +\infty[$.

On va établir deux liens avec les normes subordonnées. Tout d'abord :

Théorème 8

Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_2 = \sqrt{\rho\left({}^tAA\right)}$.

III. Rayon spectral

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Définition 7

On appelle rayon spectral de A la quantité $\rho(A) := \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} |\lambda| \in [0, +\infty[$.

On va établir deux liens avec les normes subordonnées. Tout d'abord :

Théorème 8

Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_2 = \sqrt{\rho\left({}^tAA\right)}$.

Rappel : Si $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\|_2 := \sqrt{\langle v, v\rangle_{\mathrm{can}}} = \sqrt{{}^t vv}$.

III. Rayon spectral

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Définition 7

On appelle rayon spectral de A la quantité $\rho(A) := \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} |\lambda| \in [0, +\infty[$.

On va établir deux liens avec les normes subordonnées. Tout d'abord :

Théorème 8

Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_2 = \sqrt{\rho\left({}^t\!AA\right)}$.

Rappel : Si $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\|_2 := \sqrt{\langle v, v\rangle_{\mathrm{can}}} = \sqrt{{}^t vv}$.

Pour montrer ce théorème, on utilise le lemme suivant :

III. Rayon spectral

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Définition 7

On appelle rayon spectral de A la quantité $\rho(A) := \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} |\lambda| \in [0, +\infty[$.

On va établir deux liens avec les normes subordonnées. Tout d'abord :

Théorème 8

Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_2 = \sqrt{\rho\left({}^tAA\right)}$.

Rappel : Si $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\|_2 := \sqrt{\langle v, v\rangle_{\mathrm{can}}} = \sqrt{{}^t vv}$.

Pour montrer ce théorème, on utilise le lemme suivant :

Lemme 9

Soit $S \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ positive.

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Définition 7

On appelle rayon spectral de A la quantité $\rho(A) := \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} |\lambda| \in [0, +\infty[$.

On va établir deux liens avec les normes subordonnées. Tout d'abord :

Théorème 8

Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_2 = \sqrt{\rho\left({}^tAA\right)}$.

Rappel : Si $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\|_2 := \sqrt{\langle v, v \rangle_{\mathrm{can}}} = \sqrt{{}^t vv}$.

Pour montrer ce théorème, on utilise le lemme suivant :

Lemme 9

Soit $S \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ positive. L'application $R_S : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \backslash \{0\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \frac{{}^t vSv}{{}^t vv} \end{array}$ est bornée

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Définition 7

On appelle rayon spectral de A la quantité $\rho(A) := \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} |\lambda| \in [0, +\infty[$.

On va établir deux liens avec les normes subordonnées. Tout d'abord :

Théorème 8

Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_2 = \sqrt{\rho\left({}^tAA\right)}$.

Rappel : Si $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\|_2 := \sqrt{\langle v, v\rangle_{\mathrm{can}}} = \sqrt{{}^tvv}$.

Pour montrer ce théorème, on utilise le lemme suivant :

Lemme 9

Soit $S \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ positive. L'application $R_S : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \backslash \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \frac{{}^tvSv}{{}^tvv} \end{array}$ est bornée et $\sup_{v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}} R_S(v) = \max_{v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}} R_S(v) = \rho(S)$.