III. Rayon spectral

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Définition 7

On appelle rayon spectral de A la quantité $\rho(A) := \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} |\lambda| \in [0, +\infty[$.

On va établir deux liens avec les normes subordonnées. Tout d'abord :

Théorème 8

Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_2 = \sqrt{\rho\left({}^t\!AA\right)}$.

Rappel : Si $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\|_2 := \sqrt{\langle v, v\rangle_{\mathrm{can}}} = \sqrt{{}^t vv}$.

Pour montrer ce théorème, on utilise le lemme suivant :

Lemme 9

Soit $S \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ positive. L'application $R_S : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n\backslash\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \frac{{}^t vSv}{{}^t vv} \end{array}$ est bornée et $\sup_{v\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}} R_S(v) = \max_{v\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}} R_S(v) = \rho(S)$.

On montre ensuite le résultat suivant :

III. Rayon spectral

On montre ensuite le résultat suivant :

Théorème 10

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

On montre ensuite le résultat suivant :

Théorème 10

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $A^k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0_n$,

On montre ensuite le résultat suivant :

Théorème 10

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $A^k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0_n$,
2. $\rho(A) < 1$,

On montre ensuite le résultat suivant :

Théorème 10

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $A^k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0_n$,
2. $\rho(A) < 1$,
3. $\forall v \in \mathbb{C}^n$, $A^k v \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} (0, \ldots, 0)$,

III. Rayon spectral

On montre ensuite le résultat suivant :

Théorème 10

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $A^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0_n$,
2. $\rho(A) < 1$,
3. $\forall v \in \mathbb{C}^n$, $A^k v \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} (0, \ldots, 0)$,
4. il existe une norme matricielle subordonnée $|||\cdot|||$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|||A||| < 1$.

On montre ensuite le résultat suivant :

Théorème 10

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $A^k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0_n$,
2. $\rho(A) < 1$,
3. $\forall v \in \mathbb{C}^n$, $A^k v \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} (0, \dots, 0)$,
4. il existe une norme matricielle subordonnée $\|\!| \cdot |\!\|$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\|\!| A |\!\| < 1$.

Pour cela, on utilisera la propriété suivante :

On montre ensuite le résultat suivant :

Théorème 10

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $A^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0_n$,
2. $\rho(A) < 1$,
3. $\forall v \in \mathbb{C}^n$, $A^k v \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} (0,\ldots,0)$,
4. il existe une norme matricielle subordonnée $|||\cdot|||$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|||A||| < 1$.

Pour cela, on utilisera la propriété suivante :

Théorème 11

$\forall \epsilon > 0$, il existe une norme matricielle subordonnée $|||\cdot|||$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|||A||| \leqslant \rho(A) + \epsilon$.

On considère la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$$

On considère la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$$

et le système

$$AX = B \text{ avec } B := \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

IV. Conditionnement

On considère la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$$

et le système

$$AX = B \text{ avec } B := \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

$\det(A) = 1$ et le système possède une unique solution

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

IV. Conditionnement

On “perturbe” le système

IV. Conditionnement

On “perturbe” le système : on considère le vecteur

$$B' := B + \begin{pmatrix} 0,1 \\ -0,1 \\ 0,1 \\ -0,1 \end{pmatrix}$$

IV. Conditionnement

On “perturbe” le système : on considère le vecteur

$$B' := B + \begin{pmatrix} 0,1 \\ -0,1 \\ 0,1 \\ -0,1 \end{pmatrix}$$

et la solution X' du système perturbé $AX' = B'$ devient alors

IV. Conditionnement

On "perturbe" le système : on considère le vecteur

$$B' := B + \begin{pmatrix} 0,1 \\ -0,1 \\ 0,1 \\ -0,1 \end{pmatrix}$$

et la solution X' du système perturbé $AX' = B'$ devient alors

$$X' = \begin{pmatrix} 9,2 \\ -12,6 \\ 4,5 \\ -1,1 \end{pmatrix}.$$

IV. Conditionnement

On "perturbe" le système : on considère le vecteur

$$B' := B + \begin{pmatrix} 0,1 \\ -0,1 \\ 0,1 \\ -0,1 \end{pmatrix}$$

et la solution X' du système perturbé $AX' = B'$ devient alors

$$X' = \begin{pmatrix} 9,2 \\ -12,6 \\ 4,5 \\ -1,1 \end{pmatrix}.$$

- L'erreur relative sur le second membre du système est $\frac{\|B-B'\|_\infty}{\|B\|_\infty} = \frac{0,1}{33} \simeq 0,003$,

IV. Conditionnement

On “perturbe” le système : on considère le vecteur

$$B' := B + \begin{pmatrix} 0,1 \\ -0,1 \\ 0,1 \\ -0,1 \end{pmatrix}$$

et la solution X' du système perturbé $AX' = B'$ devient alors

$$X' = \begin{pmatrix} 9,2 \\ -12,6 \\ 4,5 \\ -1,1 \end{pmatrix}.$$

- L'erreur relative sur le second membre du système est $\frac{\|B-B'\|_\infty}{\|B\|_\infty} = \frac{0,1}{33} \simeq 0,003$,
- l'erreur relative sur la solution est $\frac{\|X-X'\|_\infty}{\|X\|_\infty} = \frac{13,6}{1} = 13,6$,

IV. Conditionnement

On “perturbe” le système : on considère le vecteur

$$B' := B + \begin{pmatrix} 0,1 \\ -0,1 \\ 0,1 \\ -0,1 \end{pmatrix}$$

et la solution X' du système perturbé $AX' = B'$ devient alors

$$X' = \begin{pmatrix} 9,2 \\ -12,6 \\ 4,5 \\ -1,1 \end{pmatrix}.$$

- L'erreur relative sur le second membre du système est $\frac{\|B-B'\|_\infty}{\|B\|_\infty} = \frac{0,1}{33} \simeq 0,003$,
- l'erreur relative sur la solution est $\frac{\|X-X'\|_\infty}{\|X\|_\infty} = \frac{13,6}{1} = 13,6$,

$\Rightarrow$ le rapport d'“amplification de l'erreur” est de $\frac{13,6}{\frac{0,1}{33}} = 4488$!

IV. Conditionnement

On cherche à étudier et maîtriser ce phénomène.

IV. Conditionnement

On cherche à étudier et maîtriser ce phénomène. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$ et $|||\cdot|||$ la norme subordonnée sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ associée.

IV. Conditionnement

On cherche à étudier et maîtriser ce phénomène. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$ et $|||\cdot|||$ la norme subordonnée sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ associée. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ <u>inversible</u>.

IV. Conditionnement

On cherche à étudier et maîtriser ce phénomène. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$ et $|||\cdot|||$ la norme subordonnée sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ associée. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ inversible.

Définition 12

On note $\mathrm{cond}(A)$

On cherche à étudier et maîtriser ce phénomène. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$ et $|||\cdot|||$ la norme subordonnée sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ associée. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ inversible.

Définition 12

On note $\mathrm{cond}(A)$ la quantité $|||A|||\,|||A^{-1}|||$,

IV. Conditionnement

On cherche à étudier et maîtriser ce phénomène. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$ et $|||\cdot|||$ la norme subordonnée sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ associée. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ inversible.

Définition 12

On note $\mathrm{cond}(A)$ la quantité $|||A|||\,|||A^{-1}|||$, appelée conditionnement de A.

IV. Conditionnement

On cherche à étudier et maîtriser ce phénomène. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$ et $|||\cdot|||$ la norme subordonnée sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ associée. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ inversible.

Définition 12

On note $\mathrm{cond}(A)$ la quantité $|||A|||\,|||A^{-1}|||$, appelée conditionnement de A.

Proposition 13

IV. Conditionnement

On cherche à étudier et maîtriser ce phénomène. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$ et $|||\cdot|||$ la norme subordonnée sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ associée. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ inversible.

Définition 12

On note $\mathrm{cond}(A)$ la quantité $|||A||| \, |||A^{-1}|||$, appelée conditionnement de A.

Proposition 13

1. $\mathrm{cond}(A) = \mathrm{cond}\left(A^{-1}\right)$,

IV. Conditionnement

On cherche à étudier et maîtriser ce phénomène. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$ et $|||\cdot|||$ la norme subordonnée sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ associée. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ inversible.

Définition 12

On note $\mathrm{cond}(A)$ la quantité $|||A|||\,|||A^{-1}|||$, appelée conditionnement de A.

Proposition 13

1. $\mathrm{cond}(A) = \mathrm{cond}\left(A^{-1}\right)$,
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$, $\mathrm{cond}(\lambda A) = \mathrm{cond}(A)$,

IV. Conditionnement

On cherche à étudier et maîtriser ce phénomène. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$ et $|||\cdot|||$ la norme subordonnée sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ associée. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ inversible.

Définition 12

On note $\mathrm{cond}(A)$ la quantité $|||A|||\,|||A^{-1}|||$, appelée conditionnement de A.

Proposition 13

1. $\mathrm{cond}(A) = \mathrm{cond}\left(A^{-1}\right)$,
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$, $\mathrm{cond}(\lambda A) = \mathrm{cond}(A)$,
3. $\mathrm{cond}(A) \geqslant 1$.

IV. Conditionnement

On utilise le conditionnement pour estimer et maîtriser l'erreur sur la solution induite par une erreur sur la donnée du second membre :

IV. Conditionnement

On utilise le conditionnement pour estimer et maîtriser l'erreur sur la solution induite par une erreur sur la donnée du second membre :

Théorème 14

Soient $B, B' \in \mathbb{K}^n$, $B \neq 0$.

IV. Conditionnement

On utilise le conditionnement pour estimer et maîtriser l'erreur sur la solution induite par une erreur sur la donnée du second membre :

Théorème 14

Soient $B, B' \in \mathbb{K}^n$, $B \neq 0$. On note X la solution du système $AX = B$

IV. Conditionnement

On utilise le conditionnement pour estimer et maîtriser l'erreur sur la solution induite par une erreur sur la donnée du second membre :

Théorème 14

Soient $B, B' \in \mathbb{K}^n$, $B \neq 0$. On note X la solution du système $AX = B$ et X' la solution du système $AX' = B'$.

IV. Conditionnement

On utilise le conditionnement pour estimer et maîtriser l'erreur sur la solution induite par une erreur sur la donnée du second membre :

Théorème 14

Soient $B, B' \in \mathbb{K}^n$, $B \neq 0$. On note X la solution du système $AX = B$ et X' la solution du système $AX' = B'$. On a

IV. Conditionnement

On utilise le conditionnement pour estimer et maîtriser l'erreur sur la solution induite par une erreur sur la donnée du second membre :

Théorème 14

Soient $B, B' \in \mathbb{K}^n$, $B \neq 0$. On note X la solution du système $AX = B$ et X' la solution du système $AX' = B'$. On a

$$\frac{\|X - X'\|}{\|X\|} \leqslant \mathrm{cond}(A) \frac{\|B - B'\|}{\|B\|}.$$

IV. Conditionnement

On utilise le conditionnement pour estimer et maîtriser l'erreur sur la solution induite par une erreur sur la donnée du second membre :

Théorème 14

Soient $B, B' \in \mathbb{K}^n$, $B \neq 0$. On note X la solution du système $AX = B$ et X' la solution du système $AX' = B'$. On a

$$\frac{\|X - X'\|}{\|X\|} \leqslant \mathrm{cond}(A) \frac{\|B - B'\|}{\|B\|}.$$

Remarque

Quand $\mathrm{cond}(A)$ est "proche de 1", on dit que le système $AX = B$ est <u>bien conditionné</u>.

IV. Conditionnement

On utilise le conditionnement pour estimer et maîtriser l'erreur sur la solution induite par une erreur sur la donnée du second membre :

Théorème 14

Soient $B, B' \in \mathbb{K}^n$, $B \neq 0$. On note X la solution du système $AX = B$ et X' la solution du système $AX' = B'$. On a

$$\frac{\|X - X'\|}{\|X\|} \leqslant \mathrm{cond}(A) \frac{\|B - B'\|}{\|B\|}.$$

Remarque

Quand $\mathrm{cond}(A)$ est "proche de 1", on dit que le système $AX = B$ est <u>bien conditionné</u>. Quand $\mathrm{cond}(A)$ est "grand", on dit que le système est <u>mal conditionné</u>.