Chapitre 7 : Matrices stochastiques et théorèmes de Perron-Frobenius

I. Exemple introductif

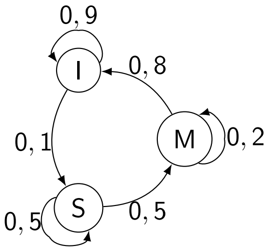
I. Exemple introductif

On modélise l'évolution semaine après semaine d'une maladie donnée au sein d'une population donnée,

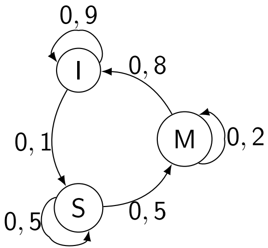
I. Exemple introductif

On modélise l'évolution semaine après semaine d'une maladie donnée au sein d'une population donnée, par un graphe :

On modélise l'évolution semaine après semaine d'une maladie donnée au sein d'une population donnée, par un graphe :



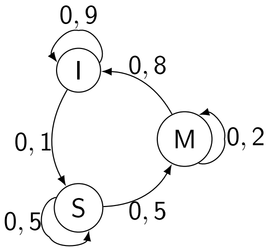
On modélise l'évolution semaine après semaine d'une maladie donnée au sein d'une population donnée, par un graphe :



- Pour chaque individu, il y a trois états possible : Malade, Immunisé, Sain.

I. Exemple introductif

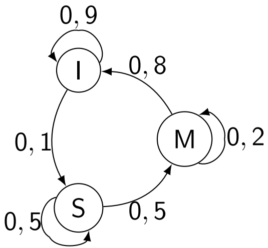
On modélise l'évolution semaine après semaine d'une maladie donnée au sein d'une population donnée, par un graphe :



- Pour chaque individu, il y a trois états possible : Malade, Immunisé, Sain.
- D'une semaine sur l'autre, on peut passer d'un état à un autre avec une probabilité fixée.

I. Exemple introductif

On modélise l'évolution semaine après semaine d'une maladie donnée au sein d'une population donnée, par un graphe :



- Pour chaque individu, il y a trois états possible : Malade, Immunisé, Sain.
- D'une semaine sur l'autre, on peut passer d'un état à un autre avec une probabilité fixée.

→ On rassemble ces probabilités dans une matrice :

I. Exemple introductif

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccc} I & S & M \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} & \\
\begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0,8 \\ 0,1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow I \\ \leftarrow S \\ \leftarrow M \end{array}
\end{array}
$$

I. Exemple introductif

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} I & S & M \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0,8 \\ 0,1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow I \\ \leftarrow S \\ \leftarrow M \end{array} \end{array}$$

appelée <u>matrice de transition</u>.

I. Exemple introductif

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} I & S & M \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0,8 \\ 0,1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow I \\ \leftarrow S \\ \leftarrow M \end{array} \end{array}$$

appelée <u>matrice de transition</u>. On note A cette matrice

I. Exemple introductif

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} I & S & M \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0,8 \\ 0,1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow I \\ \leftarrow S \\ \leftarrow M \end{array} \end{array}$$

appelée <u>matrice de transition</u>. On note A cette matrice et

$$V := \begin{pmatrix} \text{proportion d'individus } I \\ \text{proportion d'individus } S \\ \text{proportion d'individus } M \end{pmatrix}$$

I. Exemple introductif

$$\begin{array}{ccc} I & S & M \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0,8 \\ 0,1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow I \\ \leftarrow S \\ \leftarrow M \end{array}$$

appelée <u>matrice de transition</u>. On note A cette matrice et

$$V := \begin{pmatrix} \text{proportion d'individus } I \\ \text{proportion d'individus } S \\ \text{proportion d'individus } M \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

I. Exemple introductif

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccc} I & S & M \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} & \\
\begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0,8 \\ 0,1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow I \\ \leftarrow S \\ \leftarrow M \end{array}
\end{array}$$

appelée <u>matrice de transition</u>. On note A cette matrice et

$$V := \begin{pmatrix} \text{proportion d'individus } I \\ \text{proportion d'individus } S \\ \text{proportion d'individus } M \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

le vecteur d'<u>état</u> à la semaine 0

I. Exemple introductif

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} I & S & M \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0,8 \\ 0,1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow I \\ \leftarrow S \\ \leftarrow M \end{array} \end{array}$$

appelée <u>matrice de transition</u>. On note A cette matrice et

$$V := \begin{pmatrix} \text{proportion d'individus } I \\ \text{proportion d'individus } S \\ \text{proportion d'individus } M \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

le vecteur d'<u>état</u> à la semaine 0 (on a $x + y + z = 1$).

I. Exemple introductif

$$\begin{array}{ccc}
I & S & M \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow
\end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0,8 \\ 0,1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow I \\ \leftarrow S \\ \leftarrow M \end{array}$$

appelée <u>matrice de transition</u>. On note A cette matrice et

$$V := \begin{pmatrix} \text{proportion d'individus } I \\ \text{proportion d'individus } S \\ \text{proportion d'individus } M \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

le vecteur d'<u>état</u> à la semaine 0 (on a $x + y + z = 1$).

A la semaine 1, l'état de la population est

$$\begin{array}{cccc} I & S & M & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0,8 \\ 0,1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}} & \begin{array}{l} \leftarrow I \\ \leftarrow S \\ \leftarrow M \end{array} \end{array}$$

appelée matrice de transition. On note A cette matrice et

$$V := \begin{pmatrix} \text{proportion d'individus } I \\ \text{proportion d'individus } S \\ \text{proportion d'individus } M \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

le vecteur d'état à la semaine 0 (on a $x + y + z = 1$).

A la semaine 1, l'état de la population est

$$V_1 := AV$$

I. Exemple introductif

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} I & S & M \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\
\begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0,8 \\ 0,1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}
\end{array}
\quad \begin{array}{c} \leftarrow I \\ \leftarrow S \\ \leftarrow M \end{array}$$

appelée matrice de transition. On note A cette matrice et

$$V := \begin{pmatrix} \text{proportion d'individus } I \\ \text{proportion d'individus } S \\ \text{proportion d'individus } M \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

le vecteur d'état à la semaine 0 (on a $x + y + z = 1$).

A la semaine 1, l'état de la population est

$$V_1 := AV = \begin{pmatrix} 0,9x + 0,8z \\ 0,1x + 0,5y \\ 0,5y + 0,2z \end{pmatrix}$$

I. Exemple introductif

A la semaine k, l'état de la population est

I. Exemple introductif

A la semaine k, l'état de la population est

$$V_k = A \cdots AV$$

A la semaine k, l'état de la population est

$$V_k = A \cdots AV = A^k V$$

A la semaine k, l'état de la population est

$$V_k = A \cdots AV = A^k V$$

$\rightarrow$ pour anticiper l'évolution de la maladie, il faut étudier la suite des puissances successives de A.

A la semaine k, l'état de la population est

$$V_k = A \cdots AV = A^k V$$

$\rightarrow$ pour anticiper l'évolution de la maladie, il faut étudier la suite des puissances successives de A.

Exemple :

A la semaine k, l'état de la population est

$$V_k = A \cdots AV = A^k V$$

$\rightarrow$ pour anticiper l'évolution de la maladie, il faut étudier la suite des puissances successives de A.

Exemple :

$$A^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} I & S & M \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,81 & 0,4 & 0,88 \\ 0,14 & 0,25 & 0,08 \\ 0,05 & 0,35 & 0,04 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow I \\ \leftarrow S \\ \leftarrow M \end{array}$$

I. Exemple introductif

Par étude numérique, la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ semble avoir une limite

I. Exemple introductif

Par étude numérique, la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ semble avoir une limite

$$\begin{pmatrix} 0,7547\dots & 0,7547\dots & 0,7547\dots \\ 0,1509\dots & 0,1509\dots & 0,1509\dots \\ 0,0943\dots & 0,0943\dots & 0,0943\dots \end{pmatrix}$$

I. Exemple introductif

Par étude numérique, la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ semble avoir une limite

$$\begin{pmatrix} 0,7547\ldots & 0,7547\ldots & 0,7547\ldots \\ 0,1509\ldots & 0,1509\ldots & 0,1509\ldots \\ 0,0943\ldots & 0,0943\ldots & 0,0943\ldots \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ au bout d'un "certain temps", l'état de la population sera donc

Par étude numérique, la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ semble avoir une limite

$$\begin{pmatrix} 0,7547\dots & 0,7547\dots & 0,7547\dots \\ 0,1509\dots & 0,1509\dots & 0,1509\dots \\ 0,0943\dots & 0,0943\dots & 0,0943\dots \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ au bout d'un "certain temps", l'état de la population sera donc

$$\begin{pmatrix} 0,7547\dots & 0,7547\dots & 0,7547\dots \\ 0,1509\dots & 0,1509\dots & 0,1509\dots \\ 0,0943\dots & 0,0943\dots & 0,0943\dots \end{pmatrix} V =$$

I. Exemple introductif

Par étude numérique, la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ semble avoir une limite

$$\begin{pmatrix} 0,7547\dots & 0,7547\dots & 0,7547\dots \\ 0,1509\dots & 0,1509\dots & 0,1509\dots \\ 0,0943\dots & 0,0943\dots & 0,0943\dots \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ au bout d'un "certain temps", l'état de la population sera donc

$$\begin{pmatrix} 0,7547\dots & 0,7547\dots & 0,7547\dots \\ 0,1509\dots & 0,1509\dots & 0,1509\dots \\ 0,0943\dots & 0,0943\dots & 0,0943\dots \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} 0,7547\dots \\ 0,1509\dots \\ 0,0943\dots \end{pmatrix}$$

I. Exemple introductif

Par étude numérique, la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ semble avoir une limite

$$\begin{pmatrix} 0,7547\dots & 0,7547\dots & 0,7547\dots \\ 0,1509\dots & 0,1509\dots & 0,1509\dots \\ 0,0943\dots & 0,0943\dots & 0,0943\dots \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ au bout d'un "certain temps", l'état de la population sera donc

$$\begin{pmatrix} 0,7547\dots & 0,7547\dots & 0,7547\dots \\ 0,1509\dots & 0,1509\dots & 0,1509\dots \\ 0,0943\dots & 0,0943\dots & 0,0943\dots \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} 0,7547\dots \\ 0,1509\dots \\ 0,0943\dots \end{pmatrix}$$

$\left(V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right.$ et $\left.x + y + z = 1\right)$,

I. Exemple introductif

Par étude numérique, la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ semble avoir une limite

$$\begin{pmatrix} 0,7547\dots & 0,7547\dots & 0,7547\dots \\ 0,1509\dots & 0,1509\dots & 0,1509\dots \\ 0,0943\dots & 0,0943\dots & 0,0943\dots \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ au bout d'un "certain temps", l'état de la population sera donc

$$\begin{pmatrix} 0,7547\dots & 0,7547\dots & 0,7547\dots \\ 0,1509\dots & 0,1509\dots & 0,1509\dots \\ 0,0943\dots & 0,0943\dots & 0,0943\dots \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} 0,7547\dots \\ 0,1509\dots \\ 0,0943\dots \end{pmatrix}$$

$\left(V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right.$ et $\left. x+y+z=1\right)$, <u>quelque soit l'état initial</u>.

Questions :

I. Exemple introductif

Questions :

- pourquoi la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ admet-elle une limite ?

Questions :

- pourquoi la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ admet-elle une limite ?
- pourquoi les colonnes de cette limite sont-elles identiques ?

I. Exemple introductif

Questions :

- pourquoi la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ admet-elle une limite ?
- pourquoi les colonnes de cette limite sont-elles identiques ?
- peut-on déterminer l'"état limite" de la population a priori ?

II. Matrices et vecteurs stochastiques

Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ et soit $A = (a_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ et soit $A = (a_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 1

A est dite <u>stochastique</u> si

II. Matrices et vecteurs stochastiques

Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ et soit $A = (a_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 1

A est dite stochastique si

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, a_{i\,j} \geqslant 0 \text{ et}$$

II. Matrices et vecteurs stochastiques

Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ et soit $A = (a_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 1

A est dite stochastique si

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, a_{i\,j} \geqslant 0 \text{ et } \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} = 1.$$

II. Matrices et vecteurs stochastiques

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et soit $A = (a_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 1

A est dite stochastique si

$$\forall i,j \in \{1,\ldots,n\}, a_{i\,j} \geqslant 0 \text{ et } \forall i \in \{1,\ldots,n\}, \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} = 1.$$

Exemple : La transposée de la matrice A de l'introduction est stochastique.

On suppose que A est stochastique.

II. Matrices et vecteurs stochastiques

On suppose que A est stochastique.

Proposition 2

Soit $B = (b_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique.

II. Matrices et vecteurs stochastiques

On suppose que A est stochastique.

Proposition 2

Soit $B = (b_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Le produit AB est une matrice stochastique.

On suppose que A est stochastique.

Proposition 2

Soit $B = (b_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Le produit AB est une matrice stochastique.

Preuve :

II. Matrices et vecteurs stochastiques

On suppose que A est stochastique.

Proposition 2

Soit $B = (b_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Le produit AB est une matrice stochastique.

Preuve : Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$,

II. Matrices et vecteurs stochastiques

On suppose que A est stochastique.

Proposition 2

Soit $B = (b_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Le produit AB est une matrice stochastique.

<u>Preuve :</u> Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\sum_{j=1}^{n} (AB)_{i\,j} =$$

II. Matrices et vecteurs stochastiques

On suppose que A est stochastique.

Proposition 2

Soit $B = (b_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Le produit AB est une matrice stochastique.

Preuve : Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\sum_{j=1}^{n} (AB)_{i\,j} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} b_{k\,j} \right) =$$

On suppose que A est stochastique.

Proposition 2

Soit $B = (b_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Le produit AB est une matrice stochastique.

<u>Preuve :</u> Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\sum_{j=1}^{n} (AB)_{i\,j} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} b_{k\,j} \right) = \sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{k\,j} \right) =$$

On suppose que A est stochastique.

Proposition 2

Soit $B = (b_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Le produit AB est une matrice stochastique.

<u>Preuve :</u> Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\sum_{j=1}^{n} (AB)_{i\,j} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} b_{k\,j} \right) = \sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{k\,j} \right) = \sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} =$$

On suppose que A est stochastique.

Proposition 2

Soit $B = (b_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Le produit AB est une matrice stochastique.

<u>Preuve :</u> Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\sum_{j=1}^{n} (AB)_{i\,j} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} b_{k\,j} \right) = \sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{k\,j} \right) = \sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} = 1.$$

II. Matrices et vecteurs stochastiques

On suppose que A est stochastique.

Proposition 2

Soit $B = (b_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Le produit AB est une matrice stochastique.

<u>Preuve :</u> Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\sum_{j=1}^{n} (AB)_{i\,j} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} b_{k\,j} \right) = \sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{k\,j} \right) = \sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} = 1.$$

Proposition 3

Si la suite $\left(A^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge,

II. Matrices et vecteurs stochastiques

On suppose que A est stochastique.

Proposition 2

Soit $B = (b_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Le produit AB est une matrice stochastique.

<u>Preuve :</u> Soit $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\sum_{j=1}^{n} (AB)_{i\,j} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} b_{k\,j} \right) = \sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{k\,j} \right) = \sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} = 1.$$

Proposition 3

Si la suite $\left(A^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge, sa limite est une matrice stochastique.

II. Matrices et vecteurs stochastiques

On suppose que A est stochastique.

Proposition 2

Soit $B = (b_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Le produit AB est une matrice stochastique.

<u>Preuve :</u> Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\sum_{j=1}^{n} (AB)_{i\,j} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} b_{k\,j} \right) = \sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{k\,j} \right) = \sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} = 1.$$

Proposition 3

Si la suite $\left(A^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge, sa limite est une matrice stochastique.

<u>Preuve :</u>

II. Matrices et vecteurs stochastiques

On suppose que A est stochastique.

Proposition 2

Soit $B = (b_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Le produit AB est une matrice stochastique.

Preuve : Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\sum_{j=1}^{n} (AB)_{i\,j} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} b_{k\,j} \right) = \sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{k\,j} \right) = \sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} = 1.$$

Proposition 3

Si la suite $\left(A^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge, sa limite est une matrice stochastique.

Preuve : Proposition 2

II. Matrices et vecteurs stochastiques

On suppose que A est stochastique.

Proposition 2

Soit $B = (b_{i\,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Le produit AB est une matrice stochastique.

Preuve : Soit $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\sum_{j=1}^{n} (AB)_{i\,j} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} b_{k\,j} \right) = \sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{k\,j} \right) = \sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} = 1.$$

Proposition 3

Si la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite est une matrice stochastique.

Preuve : Proposition 2 + l'ensemble des matrices stochastiques est un fermé de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

II. Matrices et vecteurs stochastiques

Soit $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$.

Soit $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$.

Définition 4

v est dit stochastique

II. Matrices et vecteurs stochastiques

Soit $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$.

Définition 4

v est dit <u>stochastique</u> si $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$, $v_j \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} v_j = 1$.

II. Matrices et vecteurs stochastiques

Soit $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$.

Définition 4

v est dit stochastique si $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$, $v_j \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} v_j = 1$.

Exemple : Le vecteur V de l'introduction est stochastique.

II. Matrices et vecteurs stochastiques

Soit $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$.

Définition 4

v est dit stochastique si $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$, $v_j \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} v_j = 1$.

Exemple : Le vecteur V de l'introduction est stochastique.

Proposition 5

Supposons que le vecteur v est stochastique et soit
$w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ un vecteur stochastique.

II. Matrices et vecteurs stochastiques

Soit $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$.

Définition 4

v est dit <u>stochastique</u> si $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$, $v_j \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} v_j = 1$.

<u>Exemple :</u> Le vecteur V de l'introduction est stochastique.

Proposition 5

Supposons que le vecteur v est stochastique et soit $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ un vecteur stochastique. Si $w \in \mathrm{Vect}\{v\}$,

II. Matrices et vecteurs stochastiques

Soit $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$.

Définition 4

v est dit stochastique si $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $v_j \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} v_j = 1$.

Exemple : Le vecteur V de l'introduction est stochastique.

Proposition 5

Supposons que le vecteur v est stochastique et soit $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ un vecteur stochastique. Si $w \in \mathrm{Vect}\{v\}$, alors $w = v$.

Soit $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$.

Définition 4

v est dit stochastique si $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $v_j \geqslant 0$ et $\sum_{j=1}^{n} v_j = 1$.

Exemple : Le vecteur V de l'introduction est stochastique.

Proposition 5

Supposons que le vecteur v est stochastique et soit $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ un vecteur stochastique. Si $w \in \mathrm{Vect}\{v\}$, alors $w = v$.

Preuve : Il existe $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tel que $w = \lambda v$

II. Matrices et vecteurs stochastiques

Soit $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$.

Définition 4

v est dit stochastique si $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $v_j \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} v_j = 1$.

Exemple : Le vecteur V de l'introduction est stochastique.

Proposition 5

Supposons que le vecteur v est stochastique et soit $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ un vecteur stochastique. Si $w \in \mathrm{Vect}\{v\}$, alors $w = v$.

Preuve : Il existe $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ tel que $w = \lambda v$ et on a

II. Matrices et vecteurs stochastiques

Soit $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$.

Définition 4

v est dit stochastique si $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$, $v_j \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} v_j = 1$.

Exemple : Le vecteur V de l'introduction est stochastique.

Proposition 5

Supposons que le vecteur v est stochastique et soit $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ un vecteur stochastique. Si $w \in \mathrm{Vect}\{v\}$, alors $w = v$.

Preuve : Il existe $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tel que $w = \lambda v$ et on a

$$1 = \sum_{j=1}^{n} w_j$$

II. Matrices et vecteurs stochastiques

Soit $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$.

Définition 4

v est dit stochastique si $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$, $v_j \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} v_j = 1$.

Exemple : Le vecteur V de l'introduction est stochastique.

Proposition 5

Supposons que le vecteur v est stochastique et soit $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ un vecteur stochastique. Si $w \in \mathrm{Vect}\{v\}$, alors $w = v$.

Preuve : Il existe $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ tel que $w = \lambda v$ et on a

$$1 = \sum_{j=1}^{n} w_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda v_j$$

II. Matrices et vecteurs stochastiques

Soit $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$.

Définition 4

v est dit stochastique si $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $v_j \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} v_j = 1$.

Exemple : Le vecteur V de l'introduction est stochastique.

Proposition 5

Supposons que le vecteur v est stochastique et soit $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ un vecteur stochastique. Si $w \in \mathrm{Vect}\{v\}$, alors $w = v$.

Preuve : Il existe $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tel que $w = \lambda v$ et on a

$$1 = \sum_{j=1}^{n} w_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda v_j = \lambda \sum_{j=1}^{n} v_j$$

II. Matrices et vecteurs stochastiques

Soit $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$.

Définition 4

v est dit stochastique si $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $v_j \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} v_j = 1$.

Exemple : Le vecteur V de l'introduction est stochastique.

Proposition 5

Supposons que le vecteur v est stochastique et soit $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ un vecteur stochastique. Si $w \in \mathrm{Vect}\{v\}$, alors $w = v$.

Preuve : Il existe $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tel que $w = \lambda v$ et on a

$$1 = \sum_{j=1}^{n} w_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda v_j = \lambda \sum_{j=1}^{n} v_j = \lambda.$$

III. Matrices positives, primitives, irréductibles

Soit $A = (a_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice quelconque de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

III. Matrices positives, primitives, irréductibles

Soit $A = (a_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice quelconque de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 6

III. Matrices positives, primitives, irréductibles

Soit $A = (a_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice quelconque de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 6

On dit que A est

Soit $A = (a_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice quelconque de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 6

On dit que A est

- <u>positive</u> si

Soit $A = (a_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice quelconque de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 6

On dit que A est

- positive si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, a_{i\,j} \geqslant 0$,

III. Matrices positives, primitives, irréductibles

Soit $A = (a_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice quelconque de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 6

On dit que A est

- positive si $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, a_{i\,j} \geqslant 0$,
- strictement positive si

Soit $A = (a_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice quelconque de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 6

On dit que A est

- positive si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, a_{i\,j} \geqslant 0$,
- strictement positive si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, a_{i\,j} > 0$,

III. Matrices positives, primitives, irréductibles

Soit $A = (a_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice quelconque de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 6

On dit que A est

- positive si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, a_{i\,j} \geqslant 0$,
- strictement positive si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, a_{i\,j} > 0$,
- primitive si

Soit $A = (a_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice quelconque de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 6

On dit que A est

- positive si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, a_{i\,j} \geqslant 0$,
- strictement positive si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, a_{i\,j} > 0$,
- primitive si $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que A^k est strictement positive,

III. Matrices positives, primitives, irréductibles

Soit $A = (a_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice quelconque de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 6

On dit que A est

- positive si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, a_{i\,j} \geqslant 0$,
- strictement positive si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, a_{i\,j} > 0$,
- primitive si $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que A^k est strictement positive,
- irréductible si

III. Matrices positives, primitives, irréductibles

Soit $A = (a_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice quelconque de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 6

On dit que A est

- positive si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, a_{i\,j} \geqslant 0$,
- strictement positive si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, a_{i\,j} > 0$,
- primitive si $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que A^k est strictement positive,
- irréductible si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $\left(A^k\right)_{i\,j} > 0$.

III. Matrices positives, primitives, irréductibles

Soit $A = (a_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice quelconque de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 6

On dit que A est

- <u>positive</u> si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, a_{i\,j} \geqslant 0$,
- <u>strictement positive</u> si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, a_{i\,j} > 0$,
- <u>primitive</u> si $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que A^k est strictement positive,
- <u>irréductible</u> si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $\left(A^k\right)_{i\,j} > 0$.

<u>Exemple :</u>

- Toute matrice stochastique est positive.

III. Matrices positives, primitives, irréductibles

Soit $A = (a_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice quelconque de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 6

On dit que A est

- positive si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, a_{i\,j} \geqslant 0$,
- strictement positive si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, a_{i\,j} > 0$,
- primitive si $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que A^k est strictement positive,
- irréductible si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $\left(A^k\right)_{i\,j} > 0$.

Exemple :

- Toute matrice stochastique est positive.
- La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est primitive mais non positive.

III. Matrices positives, primitives, irréductibles

Soit $A = (a_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice quelconque de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 6

On dit que A est

- positive si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, a_{i\,j} \geqslant 0$,
- strictement positive si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, a_{i\,j} > 0$,
- primitive si $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que A^k est strictement positive,
- irréductible si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $\left(A^k\right)_{i\,j} > 0$.

Exemple :

- Toute matrice stochastique est positive.
- La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est primitive mais non positive.
- Toute matrice primitive est irréductible.

III. Matrices positives, primitives, irréductibles

Soit $A = (a_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice quelconque de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 6

On dit que A est

- positive si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, a_{i\,j} \geqslant 0$,
- strictement positive si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, a_{i\,j} > 0$,
- primitive si $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que A^k est strictement positive,
- irréductible si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $\left(A^k\right)_{i\,j} > 0$.

Exemple :

- Toute matrice stochastique est positive.
- La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est primitive mais non positive.
- Toute matrice primitive est irréductible.
- La matrice $M := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est irréductible car $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mais non primitive.

III. Matrices positives, primitives, irréductibles

Soit $A = (a_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice quelconque de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 6

On dit que A est

- positive si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, a_{i\,j} \geqslant 0$,
- strictement positive si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, a_{i\,j} > 0$,
- primitive si $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que A^k est strictement positive,
- irréductible si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $\left(A^k\right)_{i\,j} > 0$.

Exemple :

- Toute matrice stochastique est positive.
- La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est primitive mais non positive.
- Toute matrice primitive est irréductible.
- La matrice $M := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est irréductible car $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mais non primitive.
- La matrice A de l'introduction est primitive.

IV. Les théorèmes de Perron-Frobenius

IV. Les théorèmes de Perron-Frobenius

Théorème 7 (Perron)

Théorème 7 (Perron)

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive et primitive.

Théorème 7 (Perron)

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive et primitive. Alors

Théorème 7 (Perron)

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive et primitive. Alors

1. $\rho(A)$ est une valeur propre de multiplicité 1 de A,

IV. Les théorèmes de Perron-Frobenius

Théorème 7 (Perron)

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive et primitive. Alors

1. $\rho(A)$ est une valeur propre de multiplicité 1 de A,
2. $\exists v = (v_1, \ldots, v_n) \in E_{\rho(A)}$

Théorème 7 (Perron)

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive et primitive. Alors

1. $\rho(A)$ est une valeur propre de multiplicité 1 de A,
2. $\exists v = (v_1, \ldots, v_n) \in E_{\rho(A)}$ tel que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $v_i > 0$,

Théorème 7 (Perron)

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive et primitive. Alors

1. $\rho(A)$ est une valeur propre de multiplicité 1 de A,
2. $\exists v = (v_1, \ldots, v_n) \in E_{\rho(A)}$ tel que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $v_i > 0$,
3. $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} \backslash \{\rho(A)\}$, $|\lambda| < \rho(A)$

IV. Les théorèmes de Perron-Frobenius

Théorème 7 (Perron)

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive et primitive. Alors

1. $\rho(A)$ est une valeur propre de multiplicité 1 de A,
2. $\exists v = (v_1, \dots, v_n) \in E_{\rho(A)}$ tel que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $v_i > 0$,
3. $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} \backslash \{\rho(A)\}$, $|\lambda| < \rho(A)$ (on dit que la v.p. $\rho(A)$ est dominante).

Théorème 7 (Perron)

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive et primitive. Alors

1. $\rho(A)$ est une valeur propre de multiplicité 1 de A,
2. $\exists v = (v_1, \ldots, v_n) \in E_{\rho(A)}$ tel que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $v_i > 0$,
3. $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} \backslash \{\rho(A)\}$, $|\lambda| < \rho(A)$ (on dit que la v.p. $\rho(A)$ est dominante).

Nous ne montrerons que les conclusions 1 (en partie) et 2 du théorème sous des hypothèses plus fortes :

IV. Les théorèmes de Perron-Frobenius

Théorème 7 (Perron)

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive et primitive. Alors

1. $\rho(A)$ est une valeur propre de multiplicité 1 de A,
2. $\exists v = (v_1, \ldots, v_n) \in E_{\rho(A)}$ tel que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $v_i > 0$,
3. $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} \backslash \{\rho(A)\}$, $|\lambda| < \rho(A)$ (on dit que la v.p. $\rho(A)$ est <u>dominante</u>).

Nous ne montrerons que les conclusions 1 (en partie) et 2 du théorème sous des hypothèses plus fortes :

Théorème 8

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement positive telle que $\rho(A) = 1$.

IV. Les théorèmes de Perron-Frobenius

Théorème 7 (Perron)

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive et primitive. Alors

1. $\rho(A)$ est une valeur propre de multiplicité 1 de A,
2. $\exists v = (v_1, \ldots, v_n) \in E_{\rho(A)}$ tel que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $v_i > 0$,
3. $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} \backslash \{\rho(A)\}$, $|\lambda| < \rho(A)$ (on dit que la v.p. $\rho(A)$ est <u>dominante</u>).

Nous ne montrerons que les conclusions 1 (en partie) et 2 du théorème sous des hypothèses plus fortes :

Théorème 8

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement positive telle que $\rho(A) = 1$. Alors

Théorème 7 (Perron)

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive et primitive. Alors

1. $\rho(A)$ est une valeur propre de multiplicité 1 de A,
2. $\exists v = (v_1, \ldots, v_n) \in E_{\rho(A)}$ tel que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $v_i > 0$,
3. $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} \backslash \{\rho(A)\}$, $|\lambda| < \rho(A)$ (on dit que la v.p. $\rho(A)$ est <u>dominante</u>).

Nous ne montrerons que les conclusions 1 (en partie) et 2 du théorème sous des hypothèses plus fortes :

Théorème 8

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement positive telle que $\rho(A) = 1$. Alors

1. $\rho(A) = 1$ est une valeur propre de A,

IV. Les théorèmes de Perron-Frobenius

Théorème 7 (Perron)

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive et primitive. Alors

1. $\rho(A)$ est une valeur propre de multiplicité 1 de A,
2. $\exists v = (v_1, \dots, v_n) \in E_{\rho(A)}$ tel que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $v_i > 0$,
3. $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} \backslash \{\rho(A)\}$, $|\lambda| < \rho(A)$ (on dit que la v.p. $\rho(A)$ est <u>dominante</u>).

Nous ne montrerons que les conclusions 1 (en partie) et 2 du théorème sous des hypothèses plus fortes :

Théorème 8

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement positive telle que $\rho(A) = 1$. Alors

1. $\rho(A) = 1$ est une valeur propre de A,
2. $\exists v = (v_1, \dots, v_n) \in E_{\rho(A)}$ tel que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $v_i > 0$.