Théorème 7 (Perron)

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive et primitive. Alors

1. $\rho(A)$ est une valeur propre de multiplicité 1 de A,
2. $\exists v = (v_1, \ldots, v_n) \in E_{\rho(A)}$ tel que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $v_i > 0$,
3. $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} \backslash \{\rho(A)\}$, $|\lambda| < \rho(A)$ (on dit que la v.p. $\rho(A)$ est dominante).

Nous ne montrerons que les conclusions 1 (en partie) et 2 du théorème sous des hypothèses plus fortes :

Théorème 8

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement positive telle que $\rho(A) = 1$. Alors

1. $\rho(A) = 1$ est une valeur propre de A,
2. $\exists v = (v_1, \ldots, v_n) \in E_{\rho(A)}$ tel que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $v_i > 0$.

Remarque : Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est primitive et non positive, $\rho(A)$ n'est pas nécessairement une valeur propre de A :

Remarque : Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est primitive et non positive, $\rho(A)$ n'est pas nécessairement une valeur propre de A : la matrice $M := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est primitive, Remarque : Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est primitive et non positive, $\rho(A)$ n'est pas nécessairement une valeur propre de A : la matrice $M := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est primitive, $\chi_M = X^2 + X - 1 = \left(X - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

IV. Les théorèmes de Perron-Frobenius

Remarque : Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est primitive et non positive, $\rho(A)$ n'est pas nécessairement une valeur propre de A : la matrice $M := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est primitive, $\chi_M = X^2 + X - 1 = \left(X - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ donc $\rho(M) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Remarque : Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est primitive et non positive, $\rho(A)$ n'est pas nécessairement une valeur propre de A : la matrice $M := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est primitive, $\chi_M = X^2 + X - 1 = \left(X - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ donc $\rho(M) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \notin \mathrm{Sp}(M)$.

Remarque : Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est primitive et non positive, $\rho(A)$ n'est pas nécessairement une valeur propre de A : la matrice $M := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est primitive, $\chi_M = X^2 + X - 1 = \left(X - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ donc $\rho(M) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \notin \mathrm{Sp}(M)$.

Théorème 8 (Frobenius)

IV. Les théorèmes de Perron-Frobenius

Remarque : Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est primitive et non positive, $\rho(A)$ n'est pas nécessairement une valeur propre de A : la matrice $M := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est primitive, $\chi_M = X^2 + X - 1 = \left(X - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ donc $\rho(M) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \notin \mathrm{Sp}(M)$.

Théorème 8 (Frobenius)

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive et irréductible.

IV. Les théorèmes de Perron-Frobenius

Remarque : Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est primitive et non positive, $\rho(A)$ n'est pas nécessairement une valeur propre de A : la matrice $M := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est primitive, $\chi_M = X^2 + X - 1 = \left(X - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ donc $\rho(M) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \notin \mathrm{Sp}(M)$.

Théorème 8 (Frobenius)

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive et irréductible. Alors

IV. Les théorèmes de Perron-Frobenius

Remarque : Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est primitive et non positive, $\rho(A)$ n'est pas nécessairement une valeur propre de A : la matrice $M := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est primitive, $\chi_M = X^2 + X - 1 = \left(X - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ donc $\rho(M) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \notin \mathrm{Sp}(M)$.

Théorème 8 (Frobenius)

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive et irréductible. Alors

1. $\rho(A)$ est une valeur propre de multiplicité 1 de A,

IV. Les théorèmes de Perron-Frobenius

Remarque : Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est primitive et non positive, $\rho(A)$ n'est pas nécessairement une valeur propre de A : la matrice $M := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est primitive, $\chi_M = X^2 + X - 1 = \left(X - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ donc $\rho(M) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \notin \mathrm{Sp}(M)$.

Théorème 8 (Frobenius)

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive et irréductible. Alors

1. $\rho(A)$ est une valeur propre de multiplicité 1 de A,
2. $\exists v = (v_1, \ldots, v_n) \in E_{\rho(A)}$ tel que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $v_i > 0$.

<u>Remarque :</u> Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est primitive et non positive, $\rho(A)$ n'est pas nécessairement une valeur propre de A : la matrice $M := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est primitive, $\chi_M = X^2 + X - 1 = \left(X - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ donc $\rho(M) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \notin \mathrm{Sp}(M)$.

Théorème 8 (Frobenius)

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive et irréductible. Alors

1. $\rho(A)$ est une valeur propre de multiplicité 1 de A,
2. $\exists v = (v_1, \ldots, v_n) \in E_{\rho(A)}$ tel que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $v_i > 0$.

<u>Remarque :</u> Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est positive et irréductible, la v.p. $\rho(A)$ n'est pas nécessairement dominante :

IV. Les théorèmes de Perron-Frobenius

<u>Remarque :</u> Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est primitive et non positive, $\rho(A)$ n'est pas nécessairement une valeur propre de A : la matrice $M := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est primitive, $\chi_M = X^2 + X - 1 = \left(X - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ donc $\rho(M) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \notin \mathrm{Sp}(M)$.

Théorème 8 (Frobenius)

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive et irréductible. Alors

1. $\rho(A)$ est une valeur propre de multiplicité 1 de A,
2. $\exists v = (v_1, \dots, v_n) \in E_{\rho(A)}$ tel que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $v_i > 0$.

<u>Remarque :</u> Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est positive et irréductible, la v.p. $\rho(A)$ n'est pas nécessairement dominante : la matrice $M := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est irréductible et positive,

IV. Les théorèmes de Perron-Frobenius

Remarque : Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est primitive et non positive, $\rho(A)$ n'est pas nécessairement une valeur propre de A : la matrice $M := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est primitive, $\chi_M = X^2 + X - 1 = \left(X - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ donc $\rho(M) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \notin \mathrm{Sp}(M)$.

Théorème 8 (Frobenius)

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive et irréductible. Alors

1. $\rho(A)$ est une valeur propre de multiplicité 1 de A,
2. $\exists v = (v_1, \ldots, v_n) \in E_{\rho(A)}$ tel que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $v_i > 0$.

Remarque : Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est positive et irréductible, la v.p. $\rho(A)$ n'est pas nécessairement dominante : la matrice $M := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est irréductible et positive, $\mathrm{Sp}(M) = \{1; -1\}$

IV. Les théorèmes de Perron-Frobenius

Remarque : Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est primitive et non positive, $\rho(A)$ n'est pas nécessairement une valeur propre de A : la matrice $M := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est primitive, $\chi_M = X^2 + X - 1 = \left(X - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ donc $\rho(M) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \notin \mathrm{Sp}(M)$.

Théorème 8 (Frobenius)

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive et irréductible. Alors

1. $\rho(A)$ est une valeur propre de multiplicité 1 de A,
2. $\exists v = (v_1, \ldots, v_n) \in E_{\rho(A)}$ tel que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $v_i > 0$.

Remarque : Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est positive et irréductible, la v.p. $\rho(A)$ n'est pas nécessairement dominante : la matrice $M := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est irréductible et positive, $\mathrm{Sp}(M) = \{1; -1\}$ et $\rho(M) = 1 = |-1|$.

V. Le cas des matrices primitives stochastiques

V. Le cas des matrices primitives stochastiques

On applique le théorème de Perron au cas des matrices primitives stochastiques.

V. Le cas des matrices primitives stochastiques

On applique le théorème de Perron au cas des matrices primitives stochastiques. Tout d'abord :

V. Le cas des matrices primitives stochastiques

On applique le théorème de Perron au cas des matrices primitives stochastiques. Tout d'abord :

Proposition 9

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique.

On applique le théorème de Perron au cas des matrices primitives stochastiques. Tout d'abord :

Proposition 9

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Alors $\rho(A) = 1$.

On applique le théorème de Perron au cas des matrices primitives stochastiques. Tout d'abord :

Proposition 9

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Alors $\rho(A) = 1$.

Preuve :

V. Le cas des matrices primitives stochastiques

On applique le théorème de Perron au cas des matrices primitives stochastiques. Tout d'abord :

Proposition 9

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Alors $\rho(A) = 1$.

Preuve :

- $A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

On applique le théorème de Perron au cas des matrices primitives stochastiques. Tout d'abord :

Proposition 9

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Alors $\rho(A) = 1$.

<u>Preuve :</u>

- $A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $1 \in \mathrm{Sp}(A)$

On applique le théorème de Perron au cas des matrices primitives stochastiques. Tout d'abord :

Proposition 9

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Alors $\rho(A) = 1$.

<u>Preuve :</u>

- $A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $1 \in \mathrm{Sp}(A)$ donc $\rho(A) \geqslant 1$,

On applique le théorème de Perron au cas des matrices primitives stochastiques. Tout d'abord :

Proposition 9

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Alors $\rho(A) = 1$.

Preuve :

- $A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $1 \in \mathrm{Sp}(A)$ donc $\rho(A) \geqslant 1$,
- $\rho(A) \leqslant |||A|||_\infty$

On applique le théorème de Perron au cas des matrices primitives stochastiques. Tout d'abord :

Proposition 9

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Alors $\rho(A) = 1$.

Preuve :

- $A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $1 \in \mathrm{Sp}(A)$ donc $\rho(A) \geqslant 1$,
- $\rho(A) \leqslant \left\vert\kern-0.25ex\left\vert\kern-0.25ex\left\vert A \right\vert\kern-0.25ex\right\vert\kern-0.25ex\right\vert_\infty = 1$.

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice <u>stochastique</u>

V. Le cas des matrices primitives stochastiques

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique et primitive.

V. Le cas des matrices primitives stochastiques

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique et primitive. Alors :

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice <u>stochastique</u> et <u>primitive</u>. Alors :

Théorème 10

La suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge

V. Le cas des matrices primitives stochastiques

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique et primitive. Alors :

Théorème 10

La suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice stochastique

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique et primitive. Alors :

Théorème 10

La suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice stochastique de la forme

V. Le cas des matrices primitives stochastiques

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice <u>stochastique</u> et <u>primitive</u>. Alors :

Théorème 10

La suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice stochastique de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

V. Le cas des matrices primitives stochastiques

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique et primitive. Alors :

Théorème 10

La suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice stochastique de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

où $(x_1, \ldots, x_n)$ est un vecteur stochastique,

V. Le cas des matrices primitives stochastiques

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique et primitive. Alors :

Théorème 10

La suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice stochastique de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

où $(x_1, \ldots, x_n)$ est un vecteur stochastique, appelé état limite.

V. Le cas des matrices primitives stochastiques

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique et primitive. Alors :

Théorème 10

La suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice stochastique de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

où $(x_1, \ldots, x_n)$ est un vecteur stochastique, appelé état limite.

On peut déterminer l'état limite $l \in \mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ de A sans passer par la réduction de Jordan de A :

V. Le cas des matrices primitives stochastiques

On peut déterminer l'état limite $l \in \mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ de A sans passer par la réduction de Jordan de A :

Proposition 11

${}^t l \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

V. Le cas des matrices primitives stochastiques

On peut déterminer l'état limite $l \in \mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ de A sans passer par la réduction de Jordan de A :

Proposition 11

${}^t l \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est l'unique vecteur propre stochastique associé à la valeur propre 1 de ${}^t A$.

V. Le cas des matrices primitives stochastiques

On peut déterminer l'état limite $l \in \mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ de A sans passer par la réduction de Jordan de A :

Proposition 11

${}^t l \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est l'unique vecteur propre stochastique associé à la valeur propre 1 de ${}^t A$.

$\rightarrow$ l est l'unique vecteur ligne stochastique tel que ${}^t A {}^t l = {}^t l$.

On peut déterminer l'état limite $l \in \mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ de A sans passer par la réduction de Jordan de A :

Proposition 11

${}^t l \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est l'unique vecteur propre stochastique associé à la valeur propre 1 de ${}^tA$.

$\rightarrow$ l est l'unique vecteur ligne stochastique tel que ${}^tA\,{}^tl = {}^tl$.

Retour à l'exemple introductif :

V. Le cas des matrices primitives stochastiques

Retour à l'exemple introductif : La matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}$$

V. Le cas des matrices primitives stochastiques

Retour à l'exemple introductif : La matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}$$

est stochastique et primitive,

V. Le cas des matrices primitives stochastiques

Retour à l'exemple introductif : La matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}$$

est stochastique et primitive, et son état limite

V. Le cas des matrices primitives stochastiques

Retour à l'exemple introductif : La matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}$$

est stochastique et primitive, et son état limite est le vecteur ligne stochastique $l = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix}$ tel que

V. Le cas des matrices primitives stochastiques

Retour à l'exemple introductif : La matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}$$

est stochastique et primitive, et son état limite est le vecteur ligne stochastique $l = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix}$ tel que

$${}^{t}A^{t}l = {}^{t}l$$

V. Le cas des matrices primitives stochastiques

Retour à l'exemple introductif : La matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}$$

est stochastique et primitive, et son état limite est le vecteur ligne stochastique $l = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix}$ tel que

$$^tA\,^tl = {}^tl \Leftrightarrow \begin{cases} 0,9l_1 & & + 0,8l_3 & = l_1 \\ 0,1l_1 & + 0,5l_2 & & = l_2 \\ & 0,5l_2 & + 0,2l_3 & = l_3 \end{cases}$$

Retour à l'exemple introductif : La matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}$$

est stochastique et primitive, et son état limite est le vecteur ligne stochastique $l = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix}$ tel que

$$ {}^tA\,{}^tl = {}^tl \Leftrightarrow \begin{cases} 0,9l_1 + 0,8l_3 & = l_1 \\ 0,1l_1 + 0,5l_2 & = l_2 \\ 0,5l_2 + 0,2l_3 & = l_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l_1 & = 8l_3 \\ l_2 & = \frac{8}{5}l_3 \end{cases}, \quad l_3 \in \mathbb{R}.$$

V. Le cas des matrices primitives stochastiques

Retour à l'exemple introductif : La matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}$$

est stochastique et primitive, et son état limite est le vecteur ligne stochastique $l = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix}$ tel que

$$ {}^tA\,{}^tl = {}^tl \Leftrightarrow \begin{cases} 0,9l_1 + 0,8l_3 & = l_1 \\ 0,1l_1 + 0,5l_2 & = l_2 \\ 0,5l_2 + 0,2l_3 & = l_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l_1 & = 8l_3 \\ l_2 & = \frac{8}{5}l_3 \end{cases}, \quad l_3 \in \mathbb{R}.$$

De plus,

$$l_1 + l_2 + l_3 = 1 \Leftrightarrow$$

Retour à l'exemple introductif : La matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}$$

est stochastique et primitive, et son état limite est le vecteur ligne stochastique $l = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix}$ tel que

$${}^tA\,{}^tl = {}^tl \Leftrightarrow \begin{cases} 0,9l_1 \qquad\qquad + 0,8l_3 & = l_1 \\ 0,1l_1 + 0,5l_2 & = l_2 \\ \qquad\quad 0,5l_2 + 0,2l_3 & = l_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l_1 & = 8l_3 \\ l_2 & = \frac{8}{5}l_3 \end{cases}, \quad l_3 \in \mathbb{R}.$$

De plus,

$$l_1 + l_2 + l_3 = 1 \Leftrightarrow l_3 = \frac{5}{53}$$

Retour à l'exemple introductif : La matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}$$

est stochastique et primitive, et son état limite est le vecteur ligne stochastique $l = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix}$ tel que

$${}^tA\,{}^tl = {}^tl \Leftrightarrow \begin{cases} 0,9l_1 \qquad\qquad + 0,8l_3 & = l_1 \\ 0,1l_1 + 0,5l_2 & = l_2 \\ \qquad\quad 0,5l_2 + 0,2l_3 & = l_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l_1 & = 8l_3 \\ l_2 & = \frac{8}{5}l_3 \end{cases}, \quad l_3 \in \mathbb{R}.$$

De plus,

$$l_1 + l_2 + l_3 = 1 \Leftrightarrow l_3 = \frac{5}{53}$$

donc

V. Le cas des matrices primitives stochastiques

Retour à l'exemple introductif : La matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}$$

est stochastique et primitive, et son état limite est le vecteur ligne stochastique $l = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix}$ tel que

$$^tA\,^tl = {}^tl \Leftrightarrow \begin{cases} 0,9 l_1 & & + 0,8 l_3 & = l_1 \\ 0,1 l_1 + 0,5 l_2 & & & = l_2 \\ & 0,5 l_2 + 0,2 l_3 & & = l_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l_1 & = 8 l_3 \\ l_2 & = \frac{8}{5} l_3 \end{cases}, \quad l_3 \in \mathbb{R}.$$

De plus,

$$l_1 + l_2 + l_3 = 1 \Leftrightarrow l_3 = \frac{5}{53}$$

donc

$$l = \begin{pmatrix} \frac{40}{53} & \frac{8}{53} & \frac{5}{53} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7547\ldots & 0,1509\ldots & 0,0943\ldots \end{pmatrix}.$$