IV. Diagonalisabilité et diagonalisation

Définition 4

On dit que f est <u>diagonalisable</u> s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f.

Théorème 5

- Les espaces propres de f sont en somme directe.
- f est diagonalisable ssi $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n} = E$ ssi $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim\left(E_{\lambda_i}\right) = \dim(E)$.

IV. Diagonalisabilité et diagonalisation

Définition 4

On dit que f est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f.

Théorème 5

- Les espaces propres de f sont en somme directe.
- f est diagonalisable ssi $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n} = E$ ssi $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim\left(E_{\lambda_i}\right) = \dim(E)$.

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, on note m_λ la multiplicité de λ dans χ_f.

IV. Diagonalisabilité et diagonalisation

Définition 4

On dit que f est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f.

Théorème 5

- Les espaces propres de f sont en somme directe.
- f est diagonalisable ssi $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n} = E$ ssi $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim\left(E_{\lambda_i}\right) = \dim(E)$.

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, on note m_λ la multiplicité de λ dans χ_f. On a $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$.

IV. Diagonalisabilité et diagonalisation

Définition 4

On dit que f est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f.

Théorème 5

- Les espaces propres de f sont en somme directe.
- f est diagonalisable ssi $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n} = E$ ssi $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim\left(E_{\lambda_i}\right) = \dim(E)$.

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, on note m_λ la multiplicité de λ dans χ_f. On a $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$.

Théorème 6

f est diagonalisable ssi χ_f est scindé et, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, $\dim\left(E_\lambda\right) = m_\lambda$.

V. Polynômes d'endomorphismes et polynômes annulateurs

Soit $P = a_N X^N + a_{N-1} X^{N-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$.

V. Polynômes d'endomorphismes et polynômes annulateurs

Soit $P = a_N X^N + a_{N-1} X^{N-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$. On note $P(f)$ l'endomorphisme

$$a_N f^N + a_{N-1} f^{N-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \mathrm{Id}_E$$

de E.

Soit $P = a_N X^N + a_{N-1} X^{N-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$. On note $P(f)$ l'endomorphisme

$$a_N f^N + a_{N-1} f^{N-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \mathrm{Id}_E$$

de E.

Définition 7

On dit que P est un <u>polynôme annulateur de f</u> si $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

V. Polynômes d'endomorphismes et polynômes annulateurs

Soit $P = a_N X^N + a_{N-1} X^{N-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$. On note $P(f)$ l'endomorphisme

$$a_N f^N + a_{N-1} f^{N-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \mathrm{Id}_E$$

de E.

Définition 7

On dit que P est un polynôme annulateur de f si $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Lemme 8

Si P annule f et $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, alors $P(\lambda) = 0$.

V. Polynômes d'endomorphismes et polynômes annulateurs

Soit $P = a_N X^N + a_{N-1} X^{N-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$. On note $P(f)$ l'endomorphisme

$$a_N f^N + a_{N-1} f^{N-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \mathrm{Id}_E$$

de E.

Définition 7

On dit que P est un <u>polynôme annulateur de f</u> si $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Lemme 8

Si P annule f et $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, alors $P(\lambda) = 0$.

Théorème 9

f est diagonalisable ssi il existe un polynôme annulateur de f scindé à racines simples.

Définition 10

On note μ_f le polynôme annulateur de f unitaire de plus petit degré,

VI. Polynôme minimal

Définition 10

On note μ_f le polynôme annulateur de f unitaire de plus petit degré, appelé polynôme minimal de f.

VI. Polynôme minimal

Définition 10

On note μ_f <u>le</u> polynôme annulateur de f unitaire de plus petit degré, appelé <u>polynôme minimal de f</u>.

Proposition 11

μ_f divise tout polynôme annulateur de f.

VI. Polynôme minimal

Définition 10

On note μ_f le polynôme annulateur de f unitaire de plus petit degré, appelé polynôme minimal de f.

Proposition 11

μ_f divise tout polynôme annulateur de f.

En particulier, μ_f divise χ_f :

VI. Polynôme minimal

Définition 10

On note μ_f le polynôme annulateur de f unitaire de plus petit degré, appelé polynôme minimal de f.

Proposition 11

μ_f divise tout polynôme annulateur de f.

En particulier, μ_f divise χ_f :

Théorème 12 (Théorème de Cayley-Hamilton)

$$\chi_f(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

VI. Polynôme minimal

Définition 10

On note μ_f le polynôme annulateur de f unitaire de plus petit degré, appelé polynôme minimal de f.

Proposition 11

μ_f divise tout polynôme annulateur de f.

En particulier, μ_f divise χ_f :

Théorème 12 (Théorème de Cayley-Hamilton)

$$\chi_f(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Corollaire 13

Les racines de μ_f sont exactement les racines de χ_f.

VI. Polynôme minimal

Définition 10

On note μ_f le polynôme annulateur de f unitaire de plus petit degré, appelé polynôme minimal de f.

Proposition 11

μ_f divise tout polynôme annulateur de f.

En particulier, μ_f divise χ_f :

Théorème 12 (Théorème de Cayley-Hamilton)

$$\chi_f(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Corollaire 13

Les racines de μ_f sont exactement les racines de χ_f.

Théorème 14

f est diagonalisable ssi μ_f est scindé à racines simples.

VII. Triangularisabilité

Définition 15

On dit que f est triangularisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire.

VII. Triangularisabilité

Définition 15

On dit que f est triangularisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire.

Théorème 16

f est triangularisable ssi χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.

VII. Triangularisabilité

Définition 15

On dit que f est triangularisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire.

Théorème 16

f est triangularisable ssi χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.

Corollaire 17

- Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-ev est triangularisable.

Définition 15

On dit que f est triangularisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire.

Théorème 16

f est triangularisable ssi χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.

Corollaire 17

- Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-ev est triangularisable.
- Toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire.

VII. Triangularisabilité

Définition 15

On dit que f est <u>triangularisable</u> s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire.

Théorème 16

f est triangularisable ssi χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.

Corollaire 17

- Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-ev est triangularisable.
- Toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire.

On décrit dans la suite une méthode systématique de triangularisation d'un endomorphisme triangularisable : la réduction de Jordan.

VII. Triangularisabilité

Définition 15

On dit que f est <u>triangularisable</u> s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire.

Théorème 16

f est triangularisable ssi χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.

Corollaire 17

- Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-ev est triangularisable.
- Toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire.

On décrit dans la suite une méthode systématique de triangularisation d'un endomorphisme triangularisable : la réduction de Jordan.

La première étape est une réduction suivant les sous-espaces caractéristiques.

VIII. Réduction suivant les sous-espaces caractéristiques

On suppose que f est triangularisable

VIII. Réduction suivant les sous-espaces caractéristiques

On suppose que f est triangularisable avec $\chi_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$.

VIII. Réduction suivant les sous-espaces caractéristiques

On suppose que f est triangularisable avec $\chi_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$.

Définition 18

Pour $i \in \{1, \ldots, p\}$, on note

$$N_{\lambda_i} := \mathrm{Ker}\ (f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{m_{\lambda_i}}$$

le <u>sous-espace caractéristique</u> de f associé à λ_i.

VIII. Réduction suivant les sous-espaces caractéristiques

On suppose que f est triangularisable avec $\chi_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$.

Définition 18

Pour $i \in \{1, \ldots, p\}$, on note

$$N_{\lambda_i} := \mathrm{Ker}\ (f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{m_{\lambda_i}}$$

le <u>sous-espace caractéristique</u> de f associé à λ_i.

Proposition 19

Soit $i \in \{1, \ldots, p\}$.

VIII. Réduction suivant les sous-espaces caractéristiques

On suppose que f est triangularisable avec $\chi_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$.

Définition 18

Pour $i \in \{1, \ldots, p\}$, on note

$$N_{\lambda_i} := \mathrm{Ker}\ (f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{m_{\lambda_i}}$$

le sous-espace caractéristique de f associé à λ_i.

Proposition 19

Soit $i \in \{1, \ldots, p\}$.

- $E_{\lambda_i} \subset N_{\lambda_i}$,

VIII. Réduction suivant les sous-espaces caractéristiques

On suppose que f est triangularisable avec $\chi_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$.

Définition 18

Pour $i \in \{1, \ldots, p\}$, on note

$$N_{\lambda_i} := \mathrm{Ker}\ \left(f - \lambda_i \mathrm{Id}_E\right)^{m_{\lambda_i}}$$

le sous-espace caractéristique de f associé à λ_i.

Proposition 19

Soit $i \in \{1, \ldots, p\}$.

- $E_{\lambda_i} \subset N_{\lambda_i}$,
- $f\left(N_{\lambda_i}\right) \subset N_{\lambda_i}$,

VIII. Réduction suivant les sous-espaces caractéristiques

On suppose que f est triangularisable avec $\chi_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$.

Définition 18

Pour $i \in \{1, \ldots, p\}$, on note

$$N_{\lambda_i} := \mathrm{Ker}\ (f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{m_{\lambda_i}}$$

le sous-espace caractéristique de f associé à λ_i.

Proposition 19

Soit $i \in \{1, \ldots, p\}$.

- $E_{\lambda_i} \subset N_{\lambda_i}$,
- $f(N_{\lambda_i}) \subset N_{\lambda_i}$,
- $\dim(N_{\lambda_i}) = m_{\lambda_i}$,

VIII. Réduction suivant les sous-espaces caractéristiques

On suppose que f est triangularisable avec $\chi_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$.

Définition 18

Pour $i \in \{1, \ldots, p\}$, on note

$$N_{\lambda_i} := \mathrm{Ker}\ \left(f - \lambda_i \mathrm{Id}_E\right)^{m_{\lambda_i}}$$

le sous-espace caractéristique de f associé à λ_i.

Proposition 19

Soit $i \in \{1, \ldots, p\}$.

- $E_{\lambda_i} \subset N_{\lambda_i}$,
- $f\left(N_{\lambda_i}\right) \subset N_{\lambda_i}$,
- $\dim\left(N_{\lambda_i}\right)) = m_{\lambda_i}$,
- les espaces $N_{\lambda_1}, \ldots, N_{\lambda_p}$ sont en somme directe,

VIII. Réduction suivant les sous-espaces caractéristiques

On suppose que f est triangularisable avec $\chi_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$.

Définition 18

Pour $i \in \{1, \ldots, p\}$, on note

$$N_{\lambda_i} := \mathrm{Ker}\ \left(f - \lambda_i \mathrm{Id}_E\right)^{m_{\lambda_i}}$$

le sous-espace caractéristique de f associé à λ_i.

Proposition 19

Soit $i \in \{1, \ldots, p\}$.

- $E_{\lambda_i} \subset N_{\lambda_i}$,
- $f\left(N_{\lambda_i}\right) \subset N_{\lambda_i}$,
- $\dim\left(N_{\lambda_i}\right) = m_{\lambda_i}$,
- les espaces $N_{\lambda_1}, \ldots, N_{\lambda_p}$ sont en somme directe,
- $E = N_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus N_{\lambda_p}$.

On suppose que f est triangularisable avec $\chi_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$.

Définition 18

Pour $i \in \{1, \ldots, p\}$, on note

$$N_{\lambda_i} := \mathrm{Ker}\ (f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{m_{\lambda_i}}$$

le sous-espace caractéristique de f associé à λ_i.

Proposition 19

Soit $i \in \{1, \ldots, p\}$.

- $E_{\lambda_i} \subset N_{\lambda_i}$,
- $f\left(N_{\lambda_i}\right) \subset N_{\lambda_i}$,
- $\dim\left(N_{\lambda_i}\right)) = m_{\lambda_i}$,
- les espaces $N_{\lambda_1}, \ldots, N_{\lambda_p}$ sont en somme directe,
- $E = N_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus N_{\lambda_p}$.

VIII. Réduction suivant les sous-espaces caractéristiques

Conséquence : Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, soit $\mathcal{B}_i$ une base de N_{λ_i}

VIII. Réduction suivant les sous-espaces caractéristiques

Conséquence : Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, soit $\mathcal{B}_i$ une base de N_{λ_i} et soit $\mathcal{B} := \{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p\}$, Conséquence : Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, soit $\mathcal{B}_i$ une base de N_{λ_i} et soit $\mathcal{B} := \{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p\}$, alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{\lambda_p} \end{pmatrix}$$

où $A_{\lambda_i} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}\left(f_{|N_{\lambda_i}}\right)$, $i \in \{1, \ldots, p\}$.