Conséquence : Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, soit $\mathcal{B}_i$ une base de N_{λ_i} et soit $\mathcal{B} := \{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p\}$, alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{\lambda_p} \end{pmatrix}$$

où $A_{\lambda_i} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}\left(f_{|N_{\lambda_i}}\right)$, $i \in \{1, \ldots, p\}$.

VIII. Réduction suivant les sous-espaces caractéristiques

Conséquence : Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, soit $\mathcal{B}_i$ une base de N_{λ_i} et soit $\mathcal{B} := \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p\}$, alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{\lambda_p} \end{pmatrix}$$

où $A_{\lambda_i} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}\left(f_{|N_{\lambda_i}}\right)$, $i \in \{1, \dots, p\}$.

Nous allons réduire chacun des blocs A_{λ_i} en une forme particulière :

Conséquence : Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, soit $\mathcal{B}_i$ une base de N_{λ_i} et soit $\mathcal{B} := \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p\}$, alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{\lambda_p} \end{pmatrix}$$

où $A_{\lambda_i} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}\left(f_{|N_{\lambda_i}}\right)$, $i \in \{1, \dots, p\}$.

Nous allons réduire chacun des blocs A_{λ_i} en une forme particulière :

Théorème 20

Soit $i \in \{1, \dots, p\}$. Il existe une base $\mathcal{B}'_i$ de N_{λ_i} et des entiers $m^i_1, \dots, m^i_{k_i} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que

VIII. Réduction suivant les sous-espaces caractéristiques

Conséquence : Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, soit $\mathcal{B}_i$ une base de N_{λ_i} et soit $\mathcal{B} := \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p\}$, alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{\lambda_p} \end{pmatrix}$$

où $A_{\lambda_i} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}\left(f_{|N_{\lambda_i}}\right)$, $i \in \{1, \dots, p\}$.

Nous allons réduire chacun des blocs A_{λ_i} en une forme particulière :

Théorème 20

Soit $i \in \{1, \dots, p\}$. Il existe une base $\mathcal{B}'_i$ de N_{λ_i} et des entiers $m^i_1, \dots, m^i_{k_i} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_i}\left(f_{|N_{\lambda_i}}\right) = \begin{pmatrix} J_{m^i_1}(\lambda_i) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m^i_{k_i}}(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

IX. Blocs et réduction de Jordan

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

IX. Blocs et réduction de Jordan

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On note

$$J_m(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$$

(λ-bloc de Jordan de taille m).

IX. Blocs et réduction de Jordan

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On note

$$J_m(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$$

(λ-bloc de Jordan de taille m).

Preuve du théorème 20 :

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On note

$$J_m(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$$

(λ-bloc de Jordan de taille m).

Preuve du théorème 20 : Supposons que $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. Notons $N := N_\lambda$ et posons $u := f_{|N} - \lambda Id_N \in \mathcal{L}(N)$.

IX. Blocs et réduction de Jordan

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On note

$$J_m(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$$

(λ-<u>bloc de Jordan</u> de taille m).

<u>Preuve du théorème 20 :</u> Supposons que $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. Notons $N := N_\lambda$ et posons $u := f_{|N} - \lambda Id_N \in \mathcal{L}(N)$.

Théorème 21

u est nilpotent et il existe alors une base $\mathcal{B}'$ de N et des entiers $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que

IX. Blocs et réduction de Jordan

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On note

$$J_m(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$$

(λ-<u>bloc de Jordan</u> de taille m).

<u>Preuve du théorème 20 :</u> Supposons que $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. Notons $N := N_\lambda$ et posons $u := f_{|N} - \lambda Id_N \in \mathcal{L}(N)$.

Théorème 21

u est nilpotent et il existe alors une base $\mathcal{B}'$ de N et des entiers $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} J_{m_1}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_k}(0) \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\left(f_{|N}\right) \quad =$$

On a alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\left(f_{|N}\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\left(\lambda Id_N\right) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\left(u\right)$$

On a alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\left(f_{|N}\right) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\left(\lambda Id_N\right) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\left(u\right) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_{m_1}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_k}(0) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\left(f_{|N}\right) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\left(\lambda Id_N\right) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\left(u\right) \\
&= \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_{m_1}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_k}(0) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_k}(\lambda) \end{pmatrix} =: J_{m_1,\ldots,m_k}(\lambda)
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\left(f_{|N}\right) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\left(\lambda Id_N\right) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\left(u\right) \\
&= \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_{m_1}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_k}(0) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_k}(\lambda) \end{pmatrix} =: J_{m_1,\dots,m_k}(\lambda)
\end{aligned}$$

Au total, on obtient le théorème de réduction sous forme de Jordan :

Théorème 22

Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$,

Théorème 22

Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, il existe une base $\mathcal{B}'_i$ de N_{λ_i}

Théorème 22

Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, il existe une base $\mathcal{B}'_i$ de N_{λ_i} et des entiers $m^i_1, \ldots, m^i_{k_i} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que,

Théorème 22

Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, il existe une base $\mathcal{B}'_i$ de N_{λ_i} et des entiers $m^i_1, \ldots, m^i_{k_i} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que, si $\mathcal{B}' := \{\mathcal{B}'_1, \ldots, \mathcal{B}'_p\}$,

IX. Blocs et réduction de Jordan

Théorème 22

Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, il existe une base $\mathcal{B}'_i$ de N_{λ_i} et des entiers $m^i_1, \ldots, m^i_{k_i} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que, si $\mathcal{B}' := \{\mathcal{B}'_1, \ldots, \mathcal{B}'_p\}$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} J_{m^1_1, \ldots, m^1_{k_1}}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m^p_1, \ldots, m^p_{k_p}}(\lambda_p) \end{pmatrix}.$$

IX. Blocs et réduction de Jordan

Théorème 22

Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, il existe une base $\mathcal{B}'_i$ de N_{λ_i} et des entiers $m^i_1, \dots, m^i_{k_i} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que, si $\mathcal{B}' := \{\mathcal{B}'_1, \dots, \mathcal{B}'_p\}$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} J_{m^1_1, \dots, m^1_{k_1}}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m^p_1, \dots, m^p_{k_p}}(\lambda_p) \end{pmatrix}.$$

La matrice de droite est “unique” et est appelée forme de Jordan de f.