Chapitre 4 : Exponentielle de matrices

I. Introduction

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

I. Introduction

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On définit une généralisation à $\mathrm{M}_m(\mathbb{K})$ de la fonction exponentielle

I. Introduction

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On définit une généralisation à $\mathrm{M}_m(\mathbb{K})$ de la fonction exponentielle

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \end{array} .$$

I. Introduction

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On définit une généralisation à $\mathrm{M}_m(\mathbb{K})$ de la fonction exponentielle

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \end{array} .$$

Une application : Résolution des systèmes différentiels linéaires

$$\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t)$$

avec $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$ et fonction inconnue dérivable $X : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^m$.

Pour tout $A = (a_{i\,j})_{1 \leq i,j \leq m} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$, on définit

II. Norme de matrices

Pour tout $A = (a_{i\,j})_{1 \leq i,j \leq m} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$, on définit

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq m} |a_{i\,j}|^2}$$

II. Norme de matrices

Pour tout $A = (a_{i\,j})_{1\leq i,j\leq m} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$, on définit

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq m} |a_{i\,j}|^2} = \sqrt{\mathrm{Tr}\left({}^t\overline{A}\,A\right)}$$

II. Norme de matrices

Pour tout $A = (a_{i\,j})_{1 \leq i,j \leq m} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$, on définit

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq m} |a_{i\,j}|^2} = \sqrt{\mathrm{Tr}\left({}^t\overline{A}\,A\right)}$$

Proposition 1

L'application $\|\cdot\| : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_m(\mathbb{K}) & \to & [0, +\infty[\\ A & \mapsto & \|A\| \end{array}$ est une norme

Pour tout $A = (a_{i\,j})_{1 \leq i,j \leq m} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$, on définit

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq m} |a_{i\,j}|^2} = \sqrt{\mathrm{Tr}\left({}^t\overline{A}\,A\right)}$$

Proposition 1

L'application $\|\cdot\| : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_m(\mathbb{K}) & \to & [0,+\infty[\\ A & \mapsto & \|A\| \end{array}$ est une norme : le couple $(\mathrm{M}_m(\mathbb{K}), \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{K}$-evn.

II. Norme de matrices

Pour tout $A = (a_{i\,j})_{1\leq i,j\leq m} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$, on définit

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq m} |a_{i\,j}|^2} = \sqrt{\mathrm{Tr}\left({}^t\overline{A}\,A\right)}$$

Proposition 1

L'application $\|\cdot\| : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_m(\mathbb{K}) & \to & [0,+\infty[\\ A & \mapsto & \|A\| \end{array}$ est une norme : le couple $(\mathrm{M}_m(\mathbb{K}), \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{K}$-evn.

<u>Conséquence :</u> On peut définir une notion de limite sur $\mathrm{M}_m(\mathbb{K})$

II. Norme de matrices

Pour tout $A = (a_{i\,j})_{1\leq i,j\leq m} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$, on définit

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq m} |a_{i\,j}|^2} = \sqrt{\mathrm{Tr}\left({}^t\overline{A}\,A\right)}$$

Proposition 1

L'application $\|\cdot\| : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_m(\mathbb{K}) & \rightarrow & [0,+\infty[\\ A & \mapsto & \|A\| \end{array}$ est une norme : le couple $(\mathrm{M}_m(\mathbb{K}), \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{K}$-evn.

Conséquence : On peut définir une notion de limite sur $\mathrm{M}_m(\mathbb{K})$ ainsi que continuité,

II. Norme de matrices

Pour tout $A = (a_{i\,j})_{1 \leq i,j \leq m} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$, on définit

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq m} |a_{i\,j}|^2} = \sqrt{\mathrm{Tr}\left({}^t\overline{A}\,A\right)}$$

Proposition 1

L'application $\|\cdot\| : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_m(\mathbb{K}) & \rightarrow & [0, +\infty[\\ A & \mapsto & \|A\| \end{array}$ est une norme : le couple $(\mathrm{M}_m(\mathbb{K}), \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{K}$-evn.

<u>Conséquence</u> : On peut définir une notion de limite sur $\mathrm{M}_m(\mathbb{K})$ ainsi que continuité, convergence de suites de matrices,

II. Norme de matrices

Pour tout $A = (a_{i\,j})_{1 \leq i,j \leq m} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$, on définit

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq m} |a_{i\,j}|^2} = \sqrt{\mathrm{Tr}\left({}^t\overline{A}\,A\right)}$$

Proposition 1

L'application $\|\cdot\| : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_m(\mathbb{K}) & \to & [0, +\infty[\\ A & \mapsto & \|A\| \end{array}$ est une norme : le couple $(\mathrm{M}_m(\mathbb{K}), \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{K}$-evn.

Conséquence : On peut définir une notion de limite sur $\mathrm{M}_m(\mathbb{K})$ ainsi que continuité, convergence de suites de matrices, de séries de matrices...

II. Norme de matrices

Pour tout $A = (a_{i\,j})_{1 \leq i,j \leq m} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$, on définit

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq m} |a_{i\,j}|^2} = \sqrt{\mathrm{Tr}\left({}^t\overline{A}\,A\right)}$$

Proposition 1

L'application $\|\cdot\| : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_m(\mathbb{K}) & \to & [0,+\infty[\\ A & \mapsto & \|A\| \end{array}$ est une norme : le couple $(\mathrm{M}_m(\mathbb{K}), \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{K}$-evn.

<u>Conséquence</u> : On peut définir une notion de limite sur $\mathrm{M}_m(\mathbb{K})$ ainsi que continuité, convergence de suites de matrices, de séries de matrices...

Lemme 2

Soient $A, B \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$.

II. Norme de matrices

Pour tout $A = (a_{i\,j})_{1 \leq i,j \leq m} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$, on définit

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq m} |a_{i\,j}|^2} = \sqrt{\mathrm{Tr}\left({}^t\overline{A}\,A\right)}$$

Proposition 1

L'application $\|\cdot\| : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_m(\mathbb{K}) & \to & [0, +\infty[\\ A & \mapsto & \|A\| \end{array}$ est une norme : le couple $(\mathrm{M}_m(\mathbb{K}), \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{K}$-evn.

Conséquence : On peut définir une notion de limite sur $\mathrm{M}_m(\mathbb{K})$ ainsi que continuité, convergence de suites de matrices, de séries de matrices...

Lemme 2

Soient $A, B \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$. On a $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

III. Exponentielle de matrices

Soit $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$.

Soit $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$.

Proposition 3

La série $\displaystyle\sum_n \frac{A^n}{n!}$ est absolument convergente.

Soit $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$.

Proposition 3

La série $\displaystyle\sum_n \frac{A^n}{n!}$ est absolument convergente.

On pose

III. Exponentielle de matrices

Soit $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$.

Proposition 3

La série $\displaystyle\sum_n \frac{A^n}{n!}$ est absolument convergente.

On pose

$$\exp(A) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

III. Exponentielle de matrices

Soit $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$.

Proposition 3

La série $\displaystyle\sum_n \frac{A^n}{n!}$ est absolument convergente.

On pose

$$\exp(A) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Exemples 4

- $e^{0_m} = I_m$,

Soit $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$.

Proposition 3

La série $\displaystyle\sum_n \frac{A^n}{n!}$ est absolument convergente.

On pose

$$\exp(A) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Exemples 4

- $e^{0_m} = I_m$, $e^{I_m} = eI_m$.

Soit $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$.

Proposition 3

La série $\displaystyle\sum_n \frac{A^n}{n!}$ est absolument convergente.

On pose

$$\exp(A) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Exemples 4

- $e^{0_m} = I_m$, $e^{I_m} = eI_m$.
- soit $J \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice ν,

III. Exponentielle de matrices

Soit $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$.

Proposition 3

La série $\displaystyle\sum_n \frac{A^n}{n!}$ est absolument convergente.

On pose

$$\exp(A) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Exemples 4

- $e^{0_m} = I_m$, $e^{I_m} = eI_m$.
- soit $J \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice ν, alors

$$e^J = I_m + J + \frac{J^2}{2!} + \cdots + \frac{J^{\nu-1}}{(\nu-1)!}.$$