Proposition 5

Soit $B \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$.

Proposition 5

Soit $B \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$. Si $AB = BA$, alors $e^{A+B} = e^A e^B$.

Proposition 5

Soit $B \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$. Si $AB = BA$, alors $e^{A+B} = e^A e^B$.

Corollaire 6

$e^A \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$

Proposition 5

Soit $B \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$. Si $AB = BA$, alors $e^{A+B} = e^A e^B$.

Corollaire 6

$e^A \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ et $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$.

III. Exponentielle de matrices

Proposition 5

Soit $B \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$. Si $AB = BA$, alors $e^{A+B} = e^A e^B$.

Corollaire 6

$e^A \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ et $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$.

Proposition 7

Soit $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$,

III. Exponentielle de matrices

Proposition 5

Soit $B \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$. Si $AB = BA$, alors $e^{A+B} = e^A e^B$.

Corollaire 6

$e^A \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ et $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$.

Proposition 7

Soit $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$, alors $\exp\left(P^{-1}AP\right) = P^{-1}e^A P$.

Proposition 5

Soit $B \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$. Si $AB = BA$, alors $e^{A+B} = e^A e^B$.

Corollaire 6

$e^A \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ et $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$.

Proposition 7

Soit $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$, alors $\exp\left(P^{-1}AP\right) = P^{-1}e^A P$.

Corollaire 8

$$\det\left(e^A\right) = e^{\mathrm{Tr}(A)}.$$

IV. Calcul via la réduction de Jordan

$A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$

IV. Calcul via la réduction de Jordan

$A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K}) \subset \mathrm{M}_m(\mathbb{C})$:

$A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K}) \subset \mathrm{M}_m(\mathbb{C})$: il existe des blocs de Jordan $J_1, \ldots, J_r \in \mathrm{M}_m(\mathbb{C})$ et une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ tels que

IV. Calcul via la réduction de Jordan

$A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K}) \subset \mathrm{M}_m(\mathbb{C})$: il existe des blocs de Jordan $J_1, \ldots, J_r \in \mathrm{M}_m(\mathbb{C})$ et une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ tels que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}.$$

IV. Calcul via la réduction de Jordan

$A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K}) \subset \mathrm{M}_m(\mathbb{C})$: il existe des blocs de Jordan $J_1, \ldots, J_r \in \mathrm{M}_m(\mathbb{C})$ et une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ tels que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}.$$

Alors

$$e^A = P \begin{pmatrix} e^{J_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{J_r} \end{pmatrix} P^{-1}$$

IV. Calcul via la réduction de Jordan

$A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K}) \subset \mathrm{M}_m(\mathbb{C})$: il existe des blocs de Jordan $J_1, \ldots, J_r \in \mathrm{M}_m(\mathbb{C})$ et une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ tels que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}.$$

Alors

$$e^A = P \begin{pmatrix} e^{J_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{J_r} \end{pmatrix} P^{-1} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K}).$$

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On a

$$J_m(\lambda) = \lambda I_m + J_m(0).$$

Soit ν l'indice de nilpotence de $J := J_m(0)$.

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On a

$$J_m(\lambda) = \lambda I_m + J_m(0).$$

Soit ν l'indice de nilpotence de $J := J_m(0)$. Alors

$$e^{J_m(\lambda)}$$

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On a

$$J_m(\lambda) = \lambda I_m + J_m(0).$$

Soit ν l'indice de nilpotence de $J := J_m(0)$. Alors

$$e^{J_m(\lambda)} = e^{\lambda I_m + J}$$

IV. Calcul via la réduction de Jordan

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On a

$$J_m(\lambda) = \lambda I_m + J_m(0).$$

Soit ν l'indice de nilpotence de $J := J_m(0)$. Alors

$$\begin{aligned} e^{J_m(\lambda)} &= e^{\lambda I_m + J} \\ &= e^{\lambda I_m} e^{J} \end{aligned}$$

IV. Calcul via la réduction de Jordan

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On a

$$J_m(\lambda) = \lambda I_m + J_m(0).$$

Soit ν l'indice de nilpotence de $J := J_m(0)$. Alors

$$\begin{aligned} e^{J_m(\lambda)} &= e^{\lambda I_m + J} \\ &= e^{\lambda I_m} e^{J} \\ &= e^{\lambda} I_m \left(I_m + J + \frac{J^2}{2!} + \cdots + \frac{J^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \right) \end{aligned}$$

IV. Calcul via la réduction de Jordan

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On a

$$J_m(\lambda) = \lambda I_m + J_m(0).$$

Soit ν l'indice de nilpotence de $J := J_m(0)$. Alors

$$\begin{aligned} e^{J_m(\lambda)} &= e^{\lambda I_m + J} \\ &= e^{\lambda I_m} e^J \\ &= e^{\lambda} I_m \left(I_m + J + \frac{J^2}{2!} + \cdots + \frac{J^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \right) \\ &= e^{\lambda} \left(I_m + J + \frac{J^2}{2!} + \cdots + \frac{J^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \right) \end{aligned}$$

V. Systèmes différentiels linéaires

Soit $A = (a_{i\,j})_{1 \leq i,j \leq m} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$.

V. Systèmes différentiels linéaires

Soit $A = (a_{i\,j})_{1 \leq i,j \leq m} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$.
On considère le système différentiel linéaire

$$(\mathrm{S})\ X' = AX$$

V. Systèmes différentiels linéaires

Soit $A = (a_{i\,j})_{1 \leq i,j \leq m} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$.
On considère le système différentiel linéaire

$$(\mathrm{S})\ X' = AX \Leftrightarrow \begin{cases} x_1' & = a_{1\,1}x_1 + \cdots + a_{1\,m}x_m \\ \ \vdots & \qquad\quad \vdots \\ x_m' & = a_{m\,1}x_1 + \cdots + a_{m\,m}x_m \end{cases}$$

Soit $A = (a_{i\,j})_{1 \leq i,j \leq m} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$.
On considère le système différentiel linéaire

$$(\mathrm{S})\ X' = AX \Leftrightarrow \begin{cases} x_1' & = a_{1\,1}x_1 + \cdots + a_{1\,m}x_m \\ \ \vdots & \qquad\quad \vdots \\ x_m' & = a_{m\,1}x_1 + \cdots + a_{m\,m}x_m \end{cases}$$

de fonction dérivable inconnue X : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K}^m \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{pmatrix} \end{array}$

V. Systèmes différentiels linéaires

Soit $A = (a_{i\,j})_{1 \leq i,j \leq m} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$.
On considère le système différentiel linéaire

$$(\mathrm{S})\ X' = AX \Leftrightarrow \begin{cases} x_1' & = a_{1\,1}x_1 + \cdots + a_{1\,m}x_m \\ \ \vdots & \qquad \vdots \\ x_m' & = a_{m\,1}x_1 + \cdots + a_{m\,m}x_m \end{cases}$$

de fonction dérivable inconnue X : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K}^m \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{pmatrix} \end{array}$

Proposition 9

Les solutions de (S) sont les fonctions vectorielles

V. Systèmes différentiels linéaires

Soit $A = (a_{i\,j})_{1 \leq i,j \leq m} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$.
On considère le système différentiel linéaire

$$(\mathrm{S})\ X' = AX \Leftrightarrow \begin{cases} x_1' & = a_{1\,1}x_1 + \cdots + a_{1\,m}x_m \\ \vdots & \quad\quad \vdots \\ x_m' & = a_{m\,1}x_1 + \cdots + a_{m\,m}x_m \end{cases}$$

de fonction dérivable inconnue X : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K}^m \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{pmatrix} \end{array}$

Proposition 9

Les solutions de (S) sont les fonctions vectorielles

$$X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K}^m \\ t & \to & e^{tA}X_0 \end{array}$$

avec $X_0 \in \mathbb{K}^m$.