Chapitre 8

Résolution de systèmes linéaires, décompositions LU et décomposition de Cholesky

8.1 Introduction

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit n un entier naturel non nul.

Soient une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et un vecteur colonne $B \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, et considérons le système linéaire

$$(\mathrm{S})\ AX = B$$

de vecteur inconnu $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. L'objectif de ce chapitre est de présenter des méthodes de résolution d'un tel système qui soient "peu" coûteuses en calculs pour n "grand".

Supposons tout d'abord que A est une matrice inversible. Dans ce cas, le système (S) possède une unique solution $X = A^{-1}B$. En particulier, le calcul de l'inverse A^{-1} de A permet de résoudre le système (S). Une méthode de calcul de cet inverse consiste à déterminer les vecteurs colonnes de la matrice $A^{-1} = \big(Y_1|\cdots|Y_n\big)$ à l'aide de la résolution des n systèmes linéaires

$$\begin{cases} AY_1 & = X_1 \\ & \vdots \\ AY_n & = X_n \end{cases}$$

de vecteurs inconnus $Y_1, \ldots, Y_n \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, où, pour $i \in \{1, \ldots, \}$, X_i désigne le vecteur colonne de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la $i^{\text{ème}}$ coordonnée qui est 1 : on a

$$AA^{-1} = I_n \text{ ssi } A\big(Y_1|\cdots|Y_n\big) = \big(X_1|\cdots|X_n\big) \text{ ssi } \forall i \in \{1, \ldots, n\}, AY_i = X_i.$$

Dans la visée de la résolution du seul système (S), cette méthode est bien trop coûteuse en calculs. Il faut donc recourir à d'autres méthodes plus "efficaces".

Par exemple, lorsque A, en plus d'être inversible, est une matrice triangulaire supérieure, il existe une méthode permettant de résoudre le système (S) avec un minimum de calculs : la méthode dite de remontée. Cette méthode consiste à partir de la dernière équation du système (S) et puis "remonter" les équations une à une pour déterminer successivement les coordonnées du vecteur solution. Précisément, on procède de la manière suivante. Notons $A = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & \cdots & a_{1\,n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{n\,n} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, alors

$$
\begin{aligned}
\text{(S) } AX = B \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{1\,1} & \cdots & a_{1\,n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{n\,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_{1\,1}x_1 + \ldots + a_{1\,n}x_n & = b_1 \\ \qquad \ddots & \vdots \\ \qquad\qquad a_{n\,n}x_n & = b_n \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_{1\,1}x_1 + \ldots + a_{1\,n}x_n & = b_1 \\ \qquad \ddots & \vdots \\ \qquad\qquad x_n & = \frac{b_n}{a_{n\,n}} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_{1\,1}x_1 + \quad \ldots \quad + a_{1\,n}x_n & = b_1 \\ \qquad \ddots & \vdots \\ \qquad a_{n-1\,n-1}x_{n-1} + a_{n-1\,n}x_n & = b_{n-1} \\ \qquad\qquad x_n & = \frac{b_n}{a_{n\,n}} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_{1\,1}x_1 + \ldots + a_{1\,n}x_n & = b_1 \\ \qquad \ddots & \vdots \\ \qquad\qquad x_{n-1} & = \frac{1}{a_{n-1\,n-1}}\left(b_{n-1} - (a_{n-1\,n}x_n)\right) \\ \qquad\qquad x_n & = \frac{1}{a_{n\,n}} b_n \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 & = \frac{1}{a_{1\,1}}\left(b_1 - (a_{1\,2}x_2 + \ldots + a_{1\,n}x_n)\right) \\ x_2 & = \frac{1}{a_{2\,2}}\left(b_2 - (a_{2\,3}x_3 + \ldots + a_{2\,n}x_n)\right) \\ & \vdots \\ x_{n-1} & = \frac{1}{a_{n-1\,n-1}}\left(b_{n-1} - a_{n-1\,n}x_n\right) \\ x_n & = \frac{b_n}{a_{n\,n}} \end{cases}
\end{aligned}
$$

(il est ici à noter que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $a_{i\,i} \neq 0$, car A est inversible). On dit que l'on a obtenu la solution $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ du système (S) par "remontées successives" : on obtient une coordonnée x_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, à partir des coordonnées x_j, $j > i$ déterminées “plus bas”. Les calculs mis en œuvre dans cette méthode sont en particulier simples et “peu” nombreux.

Exemple 8.1.1. On considère le système

$$(S)\quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 5z & = 2 \\ \quad -4y + 3z & = 0 \\ \qquad\quad -z & = 3 \end{cases}$$

de vecteur inconnu $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned}
(S)\quad \begin{cases} x - 2y + 5z & = 2 \\ \quad -4y + 3z & = 0 \\ \qquad\quad -z & = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 5z & = 2 \\ \quad -4y + 3z & = 0 \\ \qquad\quad z & = -3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 5z & = 2 \\ \qquad y & = \frac{-3\times(-3)}{-4} = -\frac{9}{4} \\ \qquad z & = -3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x & = 2 + 2 \times \left(-\frac{9}{4}\right) - 5 \times (-3) = \frac{25}{2} \\ y & = -\frac{9}{4} \\ z & = -3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Remarque 8.1.2. On peut adapter la méthode de remontée décrite ci-dessus dans le cas où A est une matrice triangulaire supérieure non inversible (i.e. au moins un coefficient diagonal de A est nul). Considérons par exemple les deux systèmes suivants.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors le système

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 7y & = 1 \\ \qquad 2z & = 7 \\ \qquad -5z & = -2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 7y & = 1 \\ \qquad 2z & = 7 \\ \qquad z & = \frac{2}{5} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 7y & = 1 \\ \qquad 0 & = 7 - \frac{4}{5} \\ \qquad z & = \frac{2}{5} \end{cases}
\end{aligned}$$

n'a pas de solution, et le système

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 2y + 3z & = 5 \\ \quad 4y + 5z & = 1 \\ \qquad 0 & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 2y + 3z & = 5 \\ \qquad y & = \frac{1-5z}{4} \\ \qquad 0 & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x & = 5 + 2\left(\frac{1-5z}{4}\right) - 3z = \frac{11-11z}{2} \\ y & = \frac{1-5z}{4} \end{cases}$$

a pour ensemble de solutions

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{11-11z}{2} \\ \frac{1-5z}{4} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \frac{-11}{2} \\ -\frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si la matrice A est triangulaire inférieure, il existe une méthode dite de descente, analogue de la méthode de remontée pour les systèmes triangulaires supérieurs. On illustre la méthode de descente avec le système triangulaire inférieur suivant : si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x & = 3 \\ -x + 7y & = 2 \\ \quad x + 3y + 4z & = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x & = \frac{3}{2} \\ -x + 7y & = 2 \\ \quad x + 3y + 4z & = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x & = \frac{3}{2} \\ y & = \frac{1}{7}\left(2 + \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ x + 3y + 4z & = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x & = \frac{3}{2} \\ y & = \frac{1}{2} \\ z & = \frac{1}{4}\left(-1 - \frac{3}{2} - 3 \times \frac{1}{2}\right) = -1 \end{cases}$$

Les méthodes de résolution des systèmes linéaires que nous allons présenter dans ce chapitre vont consister en des "factorisations matricielles" permettant de se ramener à des systèmes triangulaires, systèmes triangulaires que l'on résout ensuite à l'aide des méthodes de remontée et/ou de descente décrites plus haut.

Nous allons étudier une méthode qui permet de ramener la résolution du système (S) à la résolution d'un système triangulaire supérieur.

8.2 Méthode du pivot de Gauss pour la résolution de systèmes linéaires

Considérons le système (S) $AX = B$ comme dans l'introduction, avec $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque. Une première méthode de résolution de ce système consiste à lui appliquer l'algorithme du pivot de Gauss : en utilisant des "pivots", on effectue des opérations sur les lignes de A et sur les coordonnées du vecteur colonne B (les mêmes), de façon à se ramener à un système triangulaire supérieur, pour lequel on peut alors employer la méthode de remontée.

On introduit cette méthode avec l'exemple suivant. On suppose que A est la matrice $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ et que B est le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors, si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$\text{(S) } AX = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5x + 2y + z &= 12 \\ 5x - 6y + 2z &= -1 \\ -4x + 2y + z &= 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{4}{5} L_1}{\Leftrightarrow} \quad \begin{cases} 5x + 2y + z &= 12 \\ \quad -8y + z &= -13 \\ \quad \frac{18}{5} y + \frac{9}{5} z &= \frac{63}{5} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & \frac{18}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -13 \\ \frac{63}{5} \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{18}{5} \frac{1}{8} L_2}{\Leftrightarrow} \quad \begin{cases} 5x + 2y + z &= 12 \\ \quad -8y + z &= -13 \\ \quad \frac{9}{4} z &= \frac{27}{4} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -13 \\ \frac{27}{4} \end{pmatrix}$$

Ce dernier système étant triangulaire supérieure, on peut le résoudre par remontée et on a finalement

$$\text{(S)} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{1}{5}(12 - (2y + z)) = \frac{1}{5}(12 - (2 \times 2 + 3)) = 1 \\ y &= -\frac{1}{8}(-13 - z) = -\frac{1}{8}(-13 - 3) = 2 \\ z &= \frac{4}{9} \times \frac{27}{4} = 3 \end{cases}$$

et le système (S) possède donc une unique solution $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Les opérations sur les lignes du système effectuées ci-dessus à chaque étape de l'algorithme du pivot de Gauss reviennent à multiplier à gauche la matrice A et le vecteur B par certaines matrices particulières, appelées matrices d'élimination :

Définition 8.2.1. *On appelle* <u>*matrice d'élimination*</u> *toute matrice de la forme*

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} k \\ \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \alpha_{k+1} & & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & \alpha_n & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

(où tous les coefficients non indiqués sont nuls) avec $k \in \{1, \dots, n\}$ et $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. La matrice ci-dessus est notée $E_k(\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)$.

Reprenons notre matrice A quelconque de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et notons $L_1, \dots, L_n$ ses lignes (dans l'ordre). Alors :

Lemme 8.2.2. *Soient $k \in \{1, \dots, n\}$ et $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. La matrice $E_k(\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)A$ est la matrice obtenue à partir de la matrice A en ajoutant, pour tout $k \in \{l+1, \dots, n\}$, $\alpha_l L_k$ à la ligne L_l.*

Démonstration. Soit $l \in \{k+1, \dots, n\}$ alors, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, le coefficient situé à la ligne l et la colonne j de la matrice $E_k(\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)A$ est $\alpha_l a_{k\,j} + a_{l\,j}$. □

Dans l'exemple ci-dessus, la première étape de l'algorithme consistait à multiplier à gauche A et B par la matrice d'élimination $E_1\left(-1, \frac{4}{5}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix}$, la deuxième à multiplier à gauche la matrice $E_1\left(-1, \frac{4}{5}\right) A$ et le vecteur $E_1\left(-1, \frac{4}{5}\right) B$ par la matrice d'élimination $E_2\left(\frac{9}{20}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{9}{20} & 1 \end{pmatrix}$. Autrement dit, pour passer du système initial (S) au système triangulaire de la fin de l'algorithme, nous avons multiplier à gauche la matrice A et le vecteur B par la matrice

$$M := E_2\left(\frac{9}{20}\right) E_1\left(-1, \frac{4}{5}\right) = E_2\left(\frac{9}{20}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{7}{20} & \frac{9}{20} & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque 8.2.3.

- Pour $k \in \{1, \dots, n\}$ et $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, la matrice d'élimination $E_k(\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)$ est inversible d'inverse $E_k(-\alpha_{k+1}, \dots, -\alpha_n)$.
- Pour $k \in \{1, \dots, n\}$ et $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, $\det\left(E_k(\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)A\right) = 1$.
- La matrice identité I_n est une matrice d'élimination : $I_n = E_1(0, \dots, 0)$.

Lorsque l'on applique l'algorithme du pivot de Gauss pour résoudre un système linéaire, on peut également être amené à effectuer un échange de lignes pour "déplacer" un pivot à la "bonne place". Par exemple, dans le système

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

le coefficient situé à la ligne 1 et la colonne 1 de la matrice est nulle et on échange alors, par exemple, les deux premières lignes de la matrice, afin de se ramener au système équivalent

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

où le coefficient non nul situé à la ligne 1 et la colonne 1 peut être utilisé comme premier pivot.

Les échanges de deux lignes ainsi appliqués au cours de l'algorithme du pivot de Gauss correspondent à des multiplications à gauche par des matrices dites de transposition :

Définition 8.2.4. *On appelle matrice de transposition toute matrice obtenue à partir de la matrice identité I_n en échangeant deux lignes. Pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, la matrice de transposition obtenue en échangeant les lignes i et j de I_n est notée $T_{i,j}$.*

Lemme 8.2.5. *Soient $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. La matrice $T_{i,j}A$ est la matrice obtenue à partir de la matrice A en échangeant les lignes i et j de A.*

Démonstration. Soit $k, l \in \{1, \ldots, n\}$. Si $k \notin \{i, j\}$, le coefficient situé à la ligne k et la colonne l de la matrice $T_{i,j}A$ est $\sum_{m=1}^{n} \delta_{k,m} a_{m\,l} = a_{k\,l}$. Le coefficient situé à la ligne i et la colonne l de la matrice $T_{i,j}A$, quant à lui, est $a_{j\,l}$. Enfin, le coefficient situé à la ligne j et la colonne l de la matrice $T_{i,j}A$ est lui $a_{i\,l}$. ☐

Dans l'exemple considéré plus haut, on a multiplié à gauche la matrice et le vecteur considérés par la matrice de transposition $T_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque 8.2.6. Soient $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. On a

- $T_{i,j} = T_{j,i}$,
- la matrice $T_{i,j}$ est inversible et l'inverse de $T_{i,j}$ est $T_{i,j}$ elle-même,
- $\det(T_{i,j}) = -1$.

Nous allons à présent montrer que la méthode du pivot de Gauss pour la résolution de systèmes linéaires fonctionne toujours, autrement dit qu'il est toujours possible, à partir d'un système (S) $AX = B$ quelconque, de se ramener à un système triangulaire supérieur à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes, i.e. à l'aide de produits à gauche par des matrices d'éliminations et de transpositions :

Théorème 8.2.7 (Méthode du pivot de Gauss)**.** *Il existe une matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, produit de matrices d'éliminations et de transpositions, telle que MA soit une matrice triangulaire supérieure.*

Remarque 8.2.8. Si M est une telle matrice alors, en particulier, le système (S) $AX = B$ est équivalent au système $MAX = MB$, qui est triangulaire supérieur.

Démonstration du théorème 8.2.7. On montre le résultat par récurrence sur n. Précisément, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, produit de matrices d'éliminations et de transpositions, telle que MA est une matrice triangulaire supérieure.

Le résultat est vrai pour $n = 1$ car toute matrice carrée de taille 1 est en particulier triangulaire supérieure.

Supposons à présent la propriété vérifiée au rang $n-1$ pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ fixé et reprenons notre matrice quelconque A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Si la première colonne de A est nulle, A est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

où $B \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{K})$: d'après l'hypothèse de récurrence, il existe alors une matrice $N \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$, produit de matrices $N_1, \ldots, N_m$ où $m \in \mathbb{N}$ et, pour tout $s \in \{1, \ldots, m\}$, N_s est une matrice d'élimination ou une matrice de transposition de $\mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, telle que NB soit une matrice triangulaire supérieure de $\mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. Si l'on note alors

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & N & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}).$$

et, pour tout $s \in \{1, \ldots, m\}$,

$$M_s := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & N_s & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

on a $M = \prod_{s=1}^{m} M_s$. De plus, pour tout $s \in \{1, \ldots, m\}$, si N_s est une matrice d'élimination, resp. de transition, de $\mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, alors M_s est une matrice d'élimination, resp. de transposition, de

$\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Enfin, la matrice

$$MA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & N & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & NB & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

est triangulaire supérieure.

Supposons maintenant que la première colonne de A soit non nulle, et notons i_0 le plus petit indice $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $a_{i\,1} \neq 0$. Si $i_0 \neq 1$, on multiplie tout d'abord à gauche la matrice A par la matrice de transposition $T_{i_0,1}$ (afin d'échanger les lignes i_0 et 1 de A) et on considère alors la matrice $A' := T_{i_0,1}A$. Si $i_0 = 1$, on pose $A' := A$. Ainsi, si on note $A' = \left(a'_{i\,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on a dans tous les cas $a'_{1\,1} \neq 0$ et on peut alors multiplier, à gauche, la matrice A'par la matrice d'élimination $E := E_1\left(-\frac{a'_{2\,1}}{a'_{1\,1}}, \ldots, -\frac{a'_{n\,1}}{a'_{1\,1}}\right)$ afin d'éliminer les autres coefficients de la première colonne de A' : on a

$$EA' = \begin{pmatrix} a'_{1\,1} & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

où $B \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. On applique ensuite l'hypothèse de récurrence à B comme dans le cas précédent : reprenant les mêmes notations, le produit

$$MEA' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & N & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{1\,1} & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{1\,1} & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & NB & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

est une matrice triangulaire supérieure, et la matrice $MET_{i_0,1}$, resp. ME, est bien une matrice inversible produit de matrices d'éliminations et de transpositions. □

8.3 La décomposition *LU*

La décomposition dite *LU* consiste en la "factorisation" de matrices vérifiant une certaine condition de "régularité" en le produit d'une matrice triangulaire inférieure (L pour "Lower") par une matrice triangulaire supérieure (U pour "Upper"). Cela permet de ramener la résolution de systèmes linéaires mettant en jeu ces matrices particulières à la résolution de deux systèmes triangulaires.

Précisément, la décomposition *LU* existe pour les matrices dont toutes les sous-matrices principales sont inversibles :

Définition 8.3.1. *Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. La sous-matrice principale de taille i de A est la sous-matrice de A obtenue en en supprimant les $n-i$ dernières lignes et $n-i$ dernières colonnes. On appelle également mineur principal d'ordre i de A le déterminant de la sous-matrice principale de taille i de A.*

Exemple 8.3.2. Les sous-matrices principales de la matrice $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ sont (5), $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, et les mineurs principaux de A sont donc 5, -40 et -90.

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème 8.3.3 (Décomposition LU)**.** *On suppose que tous les mineurs principaux de A sont non nuls (i.e. toutes les sous-matrices principales de A sont inversibles). Alors il existe des matrices L et U de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ uniques telles que*

- *L est une matrice triangulaire inférieure dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1,*
- *U est une matrice triangulaire supérieure,*
- *$A = LU$.*

Remarque 8.3.4. Si tous les mineurs principaux de la matrice A sont non nuls, alors A est en particulier inversible (car la sous-matrice principale d'ordre n de A est A elle-même). La réciproque est fausse : par exemple, le mineur principal d'ordre 1 de la matrice inversible $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est égal à 0.

La démonstration de l'existence de la décomposition LU va consister à appliquer l'algorithme du pivot de Gauss. Dans la preuve du théorème 8.3.3, nous aurons également besoin du lemme suivant :

Lemme 8.3.5. *Supposons que tous les mineurs principaux de A sont non nuls, et soit $E \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice d'élimination. Alors tous les mineurs principaux de la matrice produit EA sont non nuls.*

Démonstration. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Notons A_i la sous-matrice principale de taille i de A. Alors

$$A = \begin{pmatrix} A_i & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec $B \in \mathrm{M}_{i,n-i}(\mathbb{K})$, $C \in \mathrm{M}_{n-i,i}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathrm{M}_{n-i}(\mathbb{K})$. Quant à la matrice d'élimination E, elle est de la forme

$$\begin{pmatrix} E' & 0_{i,n-i} \\ C' & D' \end{pmatrix}$$

où $E' \in M_i(\mathbb{K})$ et $D' \in \mathrm{M}_{n-i}(\mathbb{K})$ sont également des matrices d'éliminations, et $C' \in \mathrm{M}_{n-i,i}(\mathbb{K})$. On a alors

$$EA = \begin{pmatrix} E' & 0_{i,n-i} \\ C' & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E'A_i + 0_{i,n-i}C & E'B + 0_{i,n-i}D \\ C'A_i + D'C & C'B + D'D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E'A_i & E'B \\ C'A_i + D'C & C'B + D'D \end{pmatrix}$$

et la matrice principale de taille i de EA est donc la matrice $E'A_i$. Or

$$\det(E'A_i) = \det(E')\det(A_i) = \det(A_i) \neq 0.$$

□

Démonstration du théorème 8.3.3. On montre tout d'abord l'existence de la décomposition LU de A, par récurrence sur n : on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ dont les mineurs principaux sont tous non nuls admet une décomposition $A = LU$ telle que $L \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire inférieure dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1, $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire supérieure et $A = LU$.

Pour $n = 1$, si $\left(a\right) \in \mathrm{M}_1(\mathbb{K})$ est inversible (i.e. $a \neq 0$), alors $\left(a\right) = \left(1\right)\left(a\right)$ est une décomposition LU pour $\left(a\right)$.

Maintenant, supposons la propriété vérifiée au rang $n-1$ pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ fixé, et reprenons notre matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les mineurs principaux sont supposés non nuls.

Notons $A = (a_{i\,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. On applique la première étape de l'algorithme du pivot de Gauss à A en choisissant le coefficient $a_{1\,1}$ comme pivot : $a_{1\,1}$ est le mineur principal d'ordre 1 de A et est donc non nul. Si l'on note $E_1 := E_1\left(-\frac{a_{2\,1}}{a_{1\,1}}, \dots, -\frac{a_{n\,1}}{a_{1\,1}}\right)$, on a alors

$$E_1A = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

où $A' \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. Soit $i \in \{1, \dots, n-1\}$ et notons A'_i la matrice principale d'ordre i de A' et $(E_1A)_{i+1}$ la matrice principale d'ordre $i+1$ de E_1A. On a

$$(E_1A)_{i+1} = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,i+1} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A'_i & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

et, d'après le lemme 8.3.5, $\det\left((E_1A)_{i+1}\right) \neq 0$. Or $\det\left((E_1A)_{i+1}\right) = a_{1\,1}\det\left(A'_i\right)$ donc $\det\left(A'_i\right) \neq 0$.

On a ainsi montré que tous les mineurs principaux de la matrice A' de $\mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ étaient non nuls. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence l'hypothèse de récurrence à A' : il existe une matrice triangulaire inférieure $L' \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$ de coefficients diagonaux tous égaux à 1 et une matrice triangulaire supérieure $U' \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$ telles que $A' = L'U'$. On a alors

$$E_1A = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & L'U' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & L' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & U' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

et on pose

$$L := (E_1)^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & L' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = E_1\left(\frac{a_{2\,1}}{a_{1\,1}}, \dots, \frac{a_{n\,1}}{a_{1\,1}}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & L' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ et } U := \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & U' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

La matrice L est une matrice triangulaire inférieure de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1 (car $L' \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et $(E_1)^{-1} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ sont des matrices triangulaires inférieures de coefficients diagonaux tous égaux à 1) et U est une matrice triangulaire supérieure inversible de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ (car U' est une matrice triangulaire supérieure inversible de $\mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et $a_{1\,1} \neq 0$).

On montre enfin l'unicité de la décomposition LU de A : soit $\widetilde{L} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire inférieure dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1 et soit $\widetilde{U} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure telles que $A = \widetilde{L}\widetilde{U}$. On montre que $\widetilde{L} = L$ et $\widetilde{U} = U$.

On a $LU = \widetilde{L}\widetilde{U}$ et donc $\widetilde{L}^{-1}L = \widetilde{U}U^{-1}$. Or le produit $\widetilde{L}^{-1}L$ est une matrice triangulaire inférieure dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1 (car L, $\widetilde{L}$ et donc $\widetilde{L}^{-1}$ sont toutes de telles matrices) et le produit $\widetilde{U}U^{-1}$ est une matrice triangulaire supérieure (car $\widetilde{U}$, U et U^{-1} sont toutes de telles matrices). Ainsi, nécessairement, $\widetilde{L}^{-1}L = \widetilde{U}U^{-1} = I_n$, et donc $L = \widetilde{L}$ et $U = \widetilde{U}$. □

Exemple 8.3.6. On calcule la décomposition LU de la matrice $A := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les mineurs principaux sont non nuls (exemple 8.3.2).

Nous savons qu'il existe $L := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $U := \begin{pmatrix} d & e & f \\ 0 & g & h \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telles que

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & e & f \\ 0 & g & h \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

On a alors

1. $d = 5$, $e = 2$, $f = 1$, ainsi

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & g & h \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

2. $5 = a \times 5$ donc $a = 1$, et $-4 = b \times 5$ donc $b = -\frac{4}{5}$, ainsi

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & g & h \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

3. $-6 = 1 \times 2 + 1 \times g$ donc $g = -8$, et $2 = 1 \times 1 + 1 \times h$ donc $h = 1$, ainsi

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

4. $2 = \left(-\frac{4}{5}\right) \times 2 + c \times (-8)$ donc $c = -\frac{9}{20}$, ainsi

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & -\frac{9}{20} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

5. $1 = \left(-\frac{4}{5}\right) \times 1 + \left(-\frac{9}{20}\right) \times 1 + 1 \times k$ donc $k = \frac{9}{4}$, ainsi

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & -\frac{9}{20} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

et cette dernière expression est la décomposition LU de A.

Supposons que tous les mineurs principaux de la matrice A soient non nuls. Comme illustré par l'exemple ci-dessus, le calcul de la décomposition LU de A est peu coûteux en calculs. De plus, si B est un vecteur colonne de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, cette factorisation nous permet de résoudre le système (S) $AX = B$, de vecteur inconnu $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de manière particulièrement efficace. En effet,

$$AX = B \text{ ssi } L(UX) = B.$$

Ainsi, $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est l'unique solution du système (S) (unique car A est inversible) si et seulement si le vecteur UX est l'unique solution $Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du système $LY = B$ (L est inversible). Résoudre le système (S) revient donc à résoudre successivement le système $LY = B$ puis le système $UX = Y$ (U est également inversible), qui sont tous deux des systèmes triangulaires que l'on peut donc résoudre à l'aide des méthodes de remontée et de descente.

Exemple 8.3.7. On reprend la matrice $A := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de l'exemple 8.3.6 précédent et on résout le système

$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

de vecteur inconnu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

La décomposition LU de A est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & -\frac{9}{20} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}:$$

notons $L := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & -\frac{9}{20} & 1 \end{pmatrix}$ et $U := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$. Pour résoudre le système $AX = B$, on commence par résoudre le système $LY = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ de vecteur inconnu $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$: on a

$$\begin{aligned}
LY = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & -\frac{9}{20} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a & = 1 \\ a + b & = 2 \\ -\frac{4}{5}a - \frac{9}{20}b + c & = 3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a & = 1 \\ b & = 2 - 1 = 1 \\ -\frac{4}{5}a - \frac{9}{20}b + c & = 3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a & = 1 \\ b & = 1 \\ c & = 3 + \frac{4}{5} \times 1 + \frac{9}{20} \times 1 = \frac{17}{4} \end{cases}
\end{aligned}$$

Puis on résout le système $UX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{17}{4} \end{pmatrix}$: on a

$$\begin{aligned}
UX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{17}{4} \end{pmatrix} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{17}{4} \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5x + 2y + z & = 1 \\ \quad -8y + z & = 1 \\ \qquad \frac{9}{4}z & = \frac{17}{4} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5x + 2y + z & = 1 \\ \quad -8y + z & = 1 \\ \qquad z & = \frac{17}{9} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5x + 2y + z & = 1 \\ \qquad y & = -\frac{1}{8}\left(1 - \frac{17}{9}\right) = \frac{1}{9} \\ \qquad z & = \frac{17}{9} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x & = \frac{1}{5}\left(1 - 2 \times \frac{1}{9} - \frac{17}{9}\right) = -\frac{10}{45} = -\frac{2}{9} \\ y & = \frac{1}{9} \\ z & = \frac{17}{9} \end{cases}
\end{aligned}$$

et le vecteur $X = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 17 \end{pmatrix}$ est l'unique solution du système $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

8.4 La décomposition PLU

Une généralisation de la décomposition LU existe pour toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Cette décomposition fait apparaître, en plus d'une matrice triangulaire inférieure de coefficients diagonaux tous égaux à 1 et d'une matrice triangulaire supérieure, une matrice dite de permutation, due aux éventuels échanges de lignes dans l'application de l'algorithme du pivot de Gauss.

Définition 8.4.1. *Une matrice de permutation de* $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *est une matrice dans laquelle chaque ligne et chaque colonne ne contient qu'un seul coefficient non nul, égal à* 1.

Remarque 8.4.2.

- Une matrice de permutation est obtenue par permutation (au sens du groupe symétrique) des lignes de la matrice identité I_n i.e. en appliquant une permutation du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ à l'ensemble des lignes de la matrice I_n. Il est à noter que, une permutation de $\mathfrak{S}_n$ étant une composition de transpositions et une matrice de transposition (définition 8.2.4) étant obtenue en appliquant une transposition (au sens du groupe symétrique) à l'ensemble des lignes de la matrice I_n, une matrice de permutation est un produit de matrices de transpositions.

- Si $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice de permutation obtenue en appliquant une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ aux lignes de la matrice identité I_n, $\det(P) = \epsilon(\sigma)$ où $\epsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ. En particulier, P est inversible.

- $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice de permutation obtenue en appliquant une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ aux lignes de I_n, et si $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice produit PM est la matrice obtenue à partir de M en appliquant la même permutation σ aux lignes de M.

Considérons donc maintenant une matrice A quelconque de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On a le résultat de décomposition/factorisation suivant :

Théorème 8.4.3 (Décomposition PLU)**.** *Il existe des matrices* P, L *et* U *de* $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *telles que*

- P *est une matrice de permutation,*

- L *est une matrice triangulaire inférieure dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à* 1*,*

- U *est une matrice triangulaire supérieure,*

- $A = PLU$.

Dans la preuve de ce théorème, on utilisera, comme dans la preuve du théorème 8.3.3 de décomposition LU, l'algorithme du pivot de Gauss mais en faisant, ici, également intervenir des échanges de lignes. On emploiera également le lemme suivant :

Lemme 8.4.4. *Soient $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $k < i < j$. Soient $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ et considérons les matrices de transposition $T_{i,j}$ et d'élimination $E_k(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Alors*

$$E_k(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n) T_{i,j} = T_{i,j} E_k(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n)$$

Démonstration. Commençons par remarquer que multiplier à droite une matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ par une matrice de transposition $T_{r,s}$, $r, s \in \{1, \ldots, n\}$, $r \neq s$, échange les colonnes r et s de la matrice M.

Considérons ensuite la matrice $E_k(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$. Il s'agit de la matrice

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccc} & & k & & \\ & & \downarrow & & \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
1 & & & & \\
 & \ddots & & & \\
 & & 1 & & \\
 & & \alpha_{k+1} & & \\
 & & \vdots & \ddots & \\
 & & \alpha_n & & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

La matrice $E_k(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n) T_{i,j}$, obtenue en échangeant les colonnes i et j de $E_k(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$, est la matrice obtenue en échangeant les lignes i et j de la matrice $E_k(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n)$, i.e. la matrice $T_{i,j} E_k(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n)$ $(k < i < j)$. $\square$

Démonstration du théorème 8.4.3. Nous allons montrer le résultat suivant, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, pour toute matrice A dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une matrice triangulaire supérieure $U \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, il existe $r, s \in \mathbb{N}$ et des matrices de transposition $T_1, \ldots, T_r \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ ainsi que des matrices d'élimination $E_1, \ldots, E_s \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$A = \left(\prod_{i=1}^{r} T_i\right)\left(\prod_{j=1}^{s} E_j\right) U :$$

un tel produit $\left(\prod_{i=1}^{r} T_i\right)$ forme une matrice de permutation et le produit $\left(\prod_{j=1}^{s} E_j\right)$ forme une matrice triangulaire inférieure de coefficients diagonaux tous égaux à 1.

Le résultat est vrai pour $n = 1$ pour la même raison que celle évoquée dans la preuve du théorème 8.3.3. Supposons donc maintenant le résultat vrai au rang $n - 1$ pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$ fixé, et considérons notre matrice quelconque A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Si la première colonne de A est nulle, A est de la forme

$$\begin{pmatrix}
0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
0 & & & \\
\vdots & & B & \\
0 & & &
\end{pmatrix}$$

où $B \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{K})$: d'après l'hypothèse de récurrence, il existe alors une matrice triangulaire supérieure $U' \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, il existe des entiers naturels r et s, il existe des matrices de transposition $T'_1, \ldots, T'_r \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et des matrices d'élimination $E'_1, \ldots, E'_s \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ telles que $B = \left(\prod_{i=1}^{r} T'_i\right)\left(\prod_{j=1}^{s} E'_j\right) U'$.

On pose alors

$$U := \begin{pmatrix} 0 & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & U' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$$

et, pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$ et tout $j \in \{1, \ldots, s\}$,

$$T_i := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & T'_i & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ et } E_j := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & E'_j & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Pour $i \in \{1, \ldots, r'\}$, la matrice T_i est une matrice de transposition de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et, pour $j \in \{1, \ldots, s'\}$, la matrice E_j est une matrice d'élimination de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Enfin,

$$A = \left(\prod_{i=1}^{r} T_i\right)\left(\prod_{j=1}^{s} E_j\right) U.$$

Si la première colonne de A est non nulle, notons i_0 le plus petit indice $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $a_{i\,1} \neq 0$: si $i_0 \neq 1$, on commence par multiplier à gauche la matrice A par la matrice de transposition $T := T_{i_0,1}$ et on considère la matrice $A' := TA$, et, si $i_0 = 1$, on pose $A' := A$. Ainsi, si on note $A' = \left(a'_{i\,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, $a'_{1\,1} \neq 0$, on peut ensuite multiplier à gauche la matrice A' par la matrice d'élimination $E := E_1\left(-\frac{a'_{2\,1}}{a'_{1\,1}}, \ldots, -\frac{a'_{n\,1}}{a'_{1\,1}}\right)$ afin d'éliminer les autres coefficients de la première colonne de A' : on a

$$EA' = \begin{pmatrix} a'_{1\,1} & a'_{1\,2} & \cdots & a'_{1\,n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

où $B \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. En procédant de la même manière que dans le cas précédent (i.e. en appliquant l'hypothèse de récurrence à B) et en conservant les mêmes notations, on obtient alors l'égalité

$$EA' = \left(\prod_{i=1}^{r} T_i\right)\left(\prod_{j=1}^{s} E_j\right) U$$

i.e.

$$A' = E^{-1} \left(\prod_{i=1}^{r} T_i \right) \left(\prod_{j=1}^{s} E_j \right) U.$$

Maintenant, $E^{-1} = \left(E_1 \left(-\frac{a'_{2\,1}}{a'_{1\,1}}, \ldots, -\frac{a'_{n\,1}}{a'_{1\,1}} \right) \right)^{-1} = E_1 \left(\frac{a'_{2\,1}}{a'_{1\,1}}, \ldots, \frac{a'_{n\,1}}{a'_{1\,1}} \right)$. Comme les matrices de transposition T_i, $i \in \{1, \ldots, r\}$, échangent des lignes d'indices strictement plus grands que 1, il existe, d'après le lemme 8.4.4, une matrice d'élimination $\widetilde{E} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $E^{-1} \left(\prod_{i=1}^{r} T_i \right) = \left(\prod_{i=1}^{r} T_i \right) \widetilde{E}$, et alors

$$A' = \left(\prod_{i=1}^{r} T_i \right) \widetilde{E} \left(\prod_{j=1}^{s} E_j \right) U.$$

Enfin, dans le cas où $i_0 \neq 1$, $T^{-1} = T$ et donc

$$A = T \left(\prod_{i=1}^{r} T_i \right) \widetilde{E} \left(\prod_{j=1}^{s} E_j \right) U.$$

□

Remarque 8.4.5. Il n'y a pas unicité de la décomposition PLU. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = I_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Exemple 8.4.6. Considérons la matrice $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. On applique l'algorithme du pivot de Gauss pour déterminer une décomposition PLU de A.

On commence par échanger les deux premières lignes :

$$T_{2,1}\, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puis on élimine le coefficient non nul de la première colonne de cette dernière matrice :

$$E_1(0, -1)\, T_{2,1}\, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin, on utilise le coefficient situé sur la ligne 2 et la colonne 2 de cette dernière matrice comme pivot et on a :

$$E_2(-1)\, E_1(0, -1)\, T_{2,1}\, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On pose alors $U := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (la matrice $U \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure) et on a :

$$\begin{aligned} A &= (T_{2,1})^{-1}\,(E_1(0,-1))^{-1}\,(E_2(-1))^{-1}\,U \\ &= T_{2,1}\,E_1(0,1)\,E_2(1)\,U. \end{aligned}$$

Si on pose $P := T_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $L := E_1(0,1)\,E_2(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, P est une matrice de permutation de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, L est une matrice triangulaire inférieure de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de coefficients diagonaux tous égaux à 1, et on a :

$$A = PLU.$$

Une décomposition PLU d'une matrice A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ permet notamment de résoudre efficacement tout système $AX = B$ de vecteur inconnu $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, où B est un vecteur colonne de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. La résolution d'un tel système revient à la résolution successive des trois systèmes

1. $PZ = B$, de vecteur inconnu $Z \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, système possédant une unique solution Z rapide à calculer car P est une matrice de permutation (les coordonnées de $Z = P^{-1}B$ sont obtenues par permutation des coordonnées de B),

2. $LY = Z$, de vecteur inconnu $Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, système possédant une unique solution Y (L est inversible) et résoluble par la méthode de descente (L est triangulaire inférieure),

3. $UX = Y$, de vecteur inconnu $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, qui est un système triangulaire supérieur et donc résoluble par la méthode de remontée.

En effet, si $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,

$$AX = B \text{ ssi } \; PLUX = B \text{ ssi } LUX = P^{-1}B = Z \text{ ssi } UX = L^{-1}Z = Y.$$

Exemple 8.4.7. Reprenons la matrice A de l'exemple précédent 8.4.6. Nous allons utiliser la décomposition PLU calculée alors pour déterminer la solution du système $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ de vecteur inconnu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On commence par résoudre le système $PZ = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ de vecteur inconnu $Z = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in$

$M_{3,1}(\mathbb{R})$: on a

$$PZ = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \beta & = 0 \\ \alpha & = -1 \\ \gamma & = 5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha & = -1 \\ \beta & = 0 \\ \gamma & = 5 \end{cases}$$

Puis on résout le système $LY = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ de vecteur inconnu $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$: on a

$$LY = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a & = -1 \\ b & = 0 \\ a + b + c & = 5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a & = -1 \\ b & = 0 \\ c & = 5 - (-1) - 0 = 6 \end{cases}$$

Enfin, on résout le système $UX = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$: on a

$$\begin{aligned}
UX = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \quad + z & = -1 \\ \quad y + z & = 0 \\ \quad\quad -z & = 6 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \quad + z & = -1 \\ \quad y + z & = 0 \\ \quad\quad z & = -6 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \quad + z & = -1 \\ \quad\quad y & = -(-6) = 6 \\ \quad\quad z & = -6 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x & = -1 - (-6) = 5 \\ y & = 6 \\ z & = -6 \end{cases}
\end{aligned}$$

et le vecteur $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$ est l'unique solution du système $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

8.5 La décomposition de Cholesky

La décomposition de Cholesky est une factorisation des matrices symétriques définies positives (définition 5.3.1). Elle est construite à partir de la décomposition LU de ces matrices : les matrices symétriques définies positives vérifient en effet l'hypothèse de “régularité” du théorème 8.3.3.

Proposition 8.5.1. *Soit $S \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Alors tous les mineurs principaux de S sont strictement positifs.*

Démonstration. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$ et notons S_i la sous-matrice principale de taille i de S. Remarquons tout d'abord que $S_i \in \mathrm{S}_i(\mathbb{R})$. Soit maintenant $\widetilde{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{i,1}(\mathbb{R}) \backslash \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

et notons $X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \backslash \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. On a alors ${}^t\widetilde{X} A_i \widetilde{X} = {}^t X A X > 0$ et la matrice symétrique S_i est donc définie positive. En particulier, la matrice $S_i \in \mathrm{S}_i(\mathbb{R})$ est diagonalisable (théorème 5.2.5) et ses valeurs propres sont strictement positives (proposition 5.3.4) : le déterminant de S_i est alors égal au produit de ses valeurs propres (avec multiplicités) et est donc strictement positif. $\square$

Corollaire 8.5.2. *Soit $S \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Alors S admet une décomposition LU. De plus, les coefficients diagonaux de U sont strictement positifs.*

Démonstration. D'après la proposition précédente, tous les mineurs principaux de S sont strictement positifs, en particulier non nuls : on peut donc appliquer le théorème 8.3.3 à la matrice S qui possède alors une décomposition $S = LU$ avec $L = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ \star & & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $U = \begin{pmatrix} u_{1\,1} & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & u_{n\,n} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$ et notons S_i, L_i et U_i les sous-matrices principales de taille i respectives de S, L et U : on a $L_i = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ \star & & 1 \end{pmatrix}, U_i = \begin{pmatrix} u_{1\,1} & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & u_{i\,i} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_i(\mathbb{R})$ et

$$S = \begin{pmatrix} S_i & A \\ B & C \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} L_i & 0_{i,n-i} \\ D & E \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} U_i & F \\ 0_{n-i,i} & G \end{pmatrix}$$

avec $A, F \in \mathrm{M}_{i,n-i}(\mathbb{R})$, $B, D \in \mathrm{M}_{n-i,i}(\mathbb{R})$ et $C, E, G \in \mathrm{M}_{n-i}(\mathbb{R})$. Alors

$$S = LU = \begin{pmatrix} L_i U_i & L_i F \\ D U_i & DF + EG \end{pmatrix}$$

et, en particulier, $S_i = L_i U_i$ et donc $\det(S_i) = \det(L_i) \det(U_i) = \prod_{j=1}^{i} u_{j\,j}$. Or $\det(S_i) > 0$ (par la preuve de la proposition précédente) donc $\prod_{j=1}^{i} u_{j\,j} > 0$.

On a ainsi montré que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\prod_{j=1}^{i} u_{j\,j} > 0$. En particulier $u_{1\,1} > 0$ et, si

$i \in \{2, \dots, n\}$, $\displaystyle\prod_{j=1}^{i} u_{j\,j} > 0$ et $\displaystyle\prod_{j=1}^{i-1} u_{j\,j} > 0$ donc, nécessairement, $u_{i\,i} = \dfrac{\displaystyle\prod_{j=1}^{i} u_{j\,j}}{\displaystyle\prod_{j=1}^{i-1} u_{j\,j}} > 0.$ □

Soit $S \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Considérons donc la décomposition LU de S suivant les notations de la preuve précédente. Nous allons utiliser cette factorisation pour écrire S comme le produit d'une matrice triangulaire inférieure de coefficients diagonaux strictement positifs et de de sa transposée :

Théorème 8.5.3 (Décomposition de Cholesky). *Il existe une unique matrice $T \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure à coefficients diagonaux strictement positifs (en particulier T est inversible) telle que*

$$S = T\,{}^tT.$$

Démonstration. On considère la décomposition $S = LU$ de S. D'après le corollaire 8.5.2 ci-dessus, les coefficients diagonaux $u_{1\,1}, \dots, u_{n\,n}$ de U sont tous strictement positifs et on pose alors

$$D := \begin{pmatrix} \sqrt{u_{1\,1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{u_{n\,n}} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Remarquons que l'on a

$$S = LU = LDD^{-1}U.$$

On pose ensuite $T := LD = \begin{pmatrix} \sqrt{u_{1\,1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ \star & & \sqrt{u_{n\,n}} \end{pmatrix}$ et $\widetilde{T} = D^{-1}U = \begin{pmatrix} \sqrt{u_{1\,1}} & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{u_{n\,n}} \end{pmatrix}$ ($D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{u_{1\,1}}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{u_{n\,n}}} \end{pmatrix}$), et on a donc $S = T\,\widetilde{T}$. Notons que T est une matrice triangulaire inférieure et que ses coefficients diagonaux sont tous strictement positifs.

Nous allons maintenant montrer que $\widetilde{T} = {}^tT$. Comme S est une matrice symétrique, on a

$$T\,\widetilde{T} = S = {}^tS = {}^t\widetilde{T}\,{}^tT$$

et donc, comme la matrice $\widetilde{T}$ est inversible,

$${}^t\widetilde{T}^{-1}\,T = {}^tT\,\widetilde{T}^{-1}.$$

A présent, comme $\widetilde{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{u_{1\,1}}} & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{u_{n\,n}}} \end{pmatrix}$, on a ${}^t\widetilde{T}^{-1}\,T = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ \star & & 1 \end{pmatrix}$ et ${}^tT\,\widetilde{T}^{-1} =$

$\begin{pmatrix} 1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$, d'où

$$ {}^t\widetilde{T}^{-1}T = {}^tT\widetilde{T}^{-1} = I_n $$

et donc $\widetilde{T} = {}^tT$.

Montrons enfin que la décomposition $S = T\,{}^tT$, avec $T \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure à coefficients diagonaux strictement positifs, est unique. Soit donc $T' = \begin{pmatrix} t_{1\,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ \star & & t_{n\,n} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire inférieure à coefficients diagonaux strictement positifs tels que $S = T'\,{}^tT'$ et montrons que $T' = T$. Commençons par noter D' la matrice diagonale inversible $\begin{pmatrix} t_{1\,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_{n\,n} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On a

$$ S = T'\,{}^tT' = T'D'^{-1}D'\,{}^tT' : $$

comme $T'D'^{-1} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire inférieure de coefficients diagonaux tous égaux à 1 ($D'^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t_{1\,1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{t_{n\,n}} \end{pmatrix}$) et $D'\,{}^tT' \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire supérieure, l'égalité $S = \left(T'D'^{-1}\right)\left(D'\,{}^tT'\right)$ est <u>la</u> décomposition LU de S.

On obtient ainsi les égalités $L = T'D'^{-1}$ et $U = D'\,{}^tT'$ i.e. $TD^{-1} = T'D'^{-1}$ ($T = LD$) et $D\,{}^tT = D'\,{}^tT'$ (${}^tT = D^{-1}U$). Or $D\,{}^tT = \begin{pmatrix} u_{1\,1} & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & u_{n\,n} \end{pmatrix}$ et $D'\,{}^tT' = \begin{pmatrix} t_{1\,1}^2 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & t_{n\,n}^2 \end{pmatrix}$ donc, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $t_{i\,i}^2 = u_{i\,i}$ i.e. $t_{i\,i} = \sqrt{u_{i\,i}}$ (car $t_{i\,i} > 0$), et donc $D' = D$. D'où, comme $TD^{-1} = T'D'^{-1}$, l'égalité $T = T'$. □

Exemple 8.5.4. Considérons la matrice symétrique

$$ S := \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix} \in \mathrm{S}_3(\mathbb{R}). $$

Son polynôme caractéristique est $\chi_S = (6 - X)(4 - X)(12 - X)$ donc la matrice symétrique S est définie positive. On cherche $T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure de coefficients diagonaux strictement positifs telle que

$$S = T\,{}^tT = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}.$$

On a alors

1. $a^2 = 6$ donc $a = \sqrt{6}$ (car $a > 0$),
2. $ba = 2$ donc $b = \frac{2}{\sqrt{6}}$,
3. $da = -2$ donc $d = -\frac{2}{\sqrt{6}}$,
4. $b^2 + c^2 = 6$ donc $c = \sqrt{6 - b^2} = \sqrt{\frac{16}{3}}$ $(c > 0)$,
5. $db + ec = -2$ donc $e = \frac{1}{c}\left(-2 - db\right) = \sqrt{\frac{3}{16}}\left(-2 + \frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{16}}$,
6. $d^2 + e^2 + f^2 = 10$ donc $f = \sqrt{10 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}} = 3$ $(f > 0)$.

Ainsi

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{16}{3}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{16}} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \sqrt{\frac{16}{3}} & -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{16}} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

est la décomposition de Cholesky de la matrice symétrique définie positive S.

Remarque 8.5.5.

- Comme illustré dans l'exemple ci-dessus, le calcul de la décomposition de Cholesky de S est plus avantageux que le calcul de la décomposition LU de S (il y a moins de coefficients à déterminer).
- Si B est un vecteur colonne de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la décomposition de Cholesky de la matrice S permet de résoudre efficacement le système $SX = B$ de vecteur inconnu $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: résoudre ce système revient à résoudre successivement les deux systèmes triangulaires inversibles $TY = B$, de vecteur inconnu $Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et ${}^tTX = Y$.