Feuille de TD 1 : Dualité

Exercice 1

1. Déterminer la base duale de la base $\{(1,2),(3,4)\}$ de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer la base duale de la base $\{(1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2

1. Montrer que les formes linéaires
$$\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,x_3) & \mapsto & 2x_1 - x_2 + x_3 \end{array} \quad \text{et} \quad \varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,x_3) & \mapsto & x_1 + 3x_2 + 5x_3 \end{array}$$
forment une famille libre de $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$ et la compléter en une base de $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$.
2. Montrer que les formes linéaires
$$\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,x_3) & \mapsto & 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \end{array}, \quad \varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,x_3) & \mapsto & x_2 + x_3 \end{array}, \quad \varphi_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,x_3) & \mapsto & 2x_1 + 2x_2 - x_3 \end{array}$$
forment une base de $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$ et en déterminer la base antéduale.

Exercice 3 (Polynômes de Lagrange) Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes en une indéterminée, à coefficients réels et de degré au plus n. Soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ des nombres réels deux à deux distincts. Pour $i \in \{0, \ldots, n\}$, on définit l'application
$$\varphi_i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(\alpha_i) \end{array}$$

1. Vérifier que, pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, φ_i est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que la famille $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_n\}$ est une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.
3. Déterminer la base antéduale de la base $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_n\}$ de $(\mathbb{R}_n[X])^*$ (autrement dit une base $\{L_0, \ldots, L_n\}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que, pour tout $i, j \in \{0, \ldots, n\}$, $L_j(\alpha_i) = \delta_{ij}$).

Exercice 4 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que

1. si $F_1 \subset F_2$, alors $F_2^0 \subset F_1^0$,
2. $(F_1 + F_2)^0 = F_1^0 \cap F_2^0$,
3. $(F_1 \cap F_2)^0 = F_1^0 + F_2^0$ (indication : montrer l'une des deux inclusions puis utiliser un argument de dimension pour conclure).

Exercice 5 Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps commutatif $\mathbb{K}$ et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. Montrer que $(\operatorname{Im} f)^0 = \operatorname{Ker} {}^t f$.
2. En déduire que $\operatorname{rg}\left({}^t f\right) = \operatorname{rg}(f)$.