Feuille de TD 4 : Exponentielle de matrices

Exercice 1 Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ i.e. que toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est limite d'une suite de matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (au sens de la norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ définie dans le cours). On pourra par exemple commencer par montrer que, pour $k \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, la matrice $A_k := A - \frac{1}{k} I_n$ est inversible.

2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ i.e. que toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ (au sens de la norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ définie dans le cours). On pourra par exemple commencer par montrer que toute matrice triangulaire supérieure est limite d'une suite de matrices ayant chacune ses valeurs propres deux à deux distinctes.

Exercice 2 On considère les matrices $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Calculer e^{A+B} et $e^A e^B$. Que peut-on dire de A et B ?

Exercice 3 Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que si A et B commutent alors les matrices A et $\exp(B)$ commutent également.

Exercice 4 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \\ 11 & 17 & -1 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la matrice A est nilpotente.
2. Calculer e^A.

Exercice 5 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A.
2. La matrice A est-elle diagonalisable (sur $\mathbb{R}$) ? Triangularisable (sur $\mathbb{R}$) ?
3. Calculer $\det\left(e^A\right)$.
4. Calculer e^A.

Exercice 6 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Calculer e^A.

Exercice 7 On note $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ et $B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer e^{tA} et e^{tB}.

Exercice 8 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.
Calculer, pour $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tA)$ puis résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' &= 2x - y + z \\ y' &= \quad 3y - z \\ z' &= 2x + y + 3z \end{cases}$$

de condition initiale $(x(0), y(0), z(0)) = (1, -2, 1)$.