Feuille de TD 6 : Normes matricielles subordonnées, rayon spectral, conditionnement

Exercice 1 Déterminer les normes $\|\cdot\|_1$, $|||\cdot|||_1$, $\|\cdot\|_\infty$, $|||\cdot|||_\infty$ des matrices $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ et $B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

Solution :

- La norme $\|\cdot\|_1$ est la somme des modules des coefficients : $\|A\|_1 = |1| + |2| + |0| + |2| = 5$ et $\|B\|_1 = 14$.
- La norme $\|\cdot\|_\infty$ est le maximum des modules des coefficients : $\|A\|_\infty = 2$ et $\|B\|_\infty = 4$.
- La norme $|||\cdot|||_1$ est la norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|_1$ des vecteurs colonnes. Un théorème la calcule comme le maximum de la norme $\|\cdot\|_1$ des vecteurs colonnes : $|||A|||_1 = \max\{1+0, 2+2\} = 4$ et $|||B|||_1 = \max\{9, 2, 3\} = 9$.
- La norme $|||\cdot|||_\infty$ est la norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|_\infty$ des vecteurs colonnes. Un théorème la calcule comme le maximum de la norme $\|\cdot\|_1$ des vecteurs lignes : $|||A|||_\infty = \max\{1+2, 0+2\} = 3$ et $|||B|||_1 = \max\{4, 4, 6\} = 6$.

Exercice 2 Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Toute norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle une norme subordonnée ?

   Solution : La norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas une norme matricielle : elle n'est donc pas une norme subordonnée.

2. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathrm{M}_n(K)$ telle que, pour tous $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| = \|A\|\|B\|$?

   Solution : La matrice nilpotente $N := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ vérifie pour toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathrm{M}_n(K)$

   $$\|NN\| = \|0\| < \|N\|\|N\|.$$

   Il n'existe donc pas de telle norme.

Exercice 3 Déterminer le rayon spectral des matrices de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution :

- (-2) est une valeur propre de A. La somme des deux autres est $3 + (-1) = 2 = 1 + 1$ et leur produit $3 \times (-1) - (-4) \times 1 = 1 = 1 \times 1$. L'entier 1 est donc valeur propre double. Le rayon spectral, maximum des modules des valeurs propres, est donc 2.
- Les valeurs propres de B (ou de sa transposée ${}^tB := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$) sont 1, $2i$ et $-2i$. Le rayon spectral de B est donc 2.
- Le polynôme caractéristique de C est $(X-2)^2(3-X)$. Le rayon spectral de C est donc 3.

Exercice 4 Déterminer les normes $\|\cdot\|_2$ et $|||\cdot|||_2$ des matrices $C := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ et $D := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

Solution :

- La norme $\|\cdot\|_2$ est la racine carrée de la somme des carrés des modules des coefficients :$\|C\|_2 = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$ et $\|D\|_2 = \sqrt{3 \times (1+1+4)} = 3\sqrt{2}$.
- La norme $|||\cdot|||_2$ est la norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|_2$ des vecteurs colonnes. Un théorème calcule $|||A|||_2$ comme la racine carrée du rayon spectral de ${}^tAA$:
  On trouve successivement, la matrice symétrique ${}^tCC = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique $\chi_{{}^tCC}(X) = X^2 - 3X + 1$ dont les racines sont $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, le rayon spectral de ${}^tCC$ soit $\rho({}^tCC) = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et enfin la norme $|||C|||_2 = \sqrt{\rho({}^tCC)} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$.
  On trouve ${}^tDD = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} = I + 5J$ avec $J := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ de valeurs propres 0 (de multiplicité 2 dans $\chi_J(X)$) et 3. Les valeurs propres de ${}^tDD$ sont donc $1 + 5 \times 0 = 1$ et $1 + 5 \times 3 = 16$. Donc, $|||D|||_2 = \sqrt{\rho({}^tDD)} = \sqrt{16} = 4$.

Exercice 5 Pour chacune des matrices A suivantes, la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution :

- Le spectre de A est $\{1, -1\}$: celui de A^k est donc 1 et $\{1, (-1)^k\}$ qui constitue une suite d'ensembles sans limite. La suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge donc pas.

  Autre démarche : On calcule (on peut aussi noter que le polynôme caractéristique $X^2 - 1$ annule A)
  $$A^{2n} = I_2 \text{ et } A^{2n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}.$$
  Les deux sous-suites de termes d'indices pairs et impairs sont constantes donc convergentes mais vers des limites distinctes. La suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge donc pas.

- L'image de $e_1 + e_2$ est $-\frac{1}{2}(e_1 + e_2)$: par conséquent $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A. L'autre, déterminée par la trace, est $\frac{1}{2}$. Le rayon spectral de A est donc $\frac{1}{2} < 1$ et la suite $(\left(A^k\right))_{k\in\mathbb{N}}$ est donc convergente vers la matrice nulle.

  Autre démarche : On calcule
  $$A^{2n} = \frac{1}{2^{2n}} I_2 \text{ et } A^{2n+1} = -\frac{1}{2^{2n+1}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
  Les deux sous-suites de termes d'indices pairs et impairs convergent toutes les deux vers la même limite, la matrice nulle : la suite $(\left(A^k\right))_{k\in\mathbb{N}}$ est donc convergente vers la matrice nulle.

- Le polynôme caractéristique de A est $(3 - X)(X - 2)^2$. Le rayon spectral de A est strictement plus grand que 1 : la suite $(\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge donc pas, car la suite des spectres $(\{3^k, 2^k\})_{k\in\mathbb{N}}$ de ces matrices trigonalisables n'a pas d'ensemble limite.

Exercice 6 Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$ et $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$. Le but de l'exercice est de montrer que la série $\sum\limits_n A^n$ de $\mathrm{M}_m(\mathbb{K})$ converge si et seulement si $\rho(A) < 1$.

1. Montrer que si la série $\sum\limits_n A^n$ converge alors $\rho(A) < 1$.

   Solution : Si la suite $\sum\limits_n A^n$ converge, alors son terme général A^n tend vers la matrice nulle. Par théorème, le rayon spectral de A est donc strictement plus petit que 1.

2. Montrer que si $\rho(A) < 1$ alors la matrice $I_m - A$ de $\mathrm{M}_m(\mathbb{K})$ est inversible.

   Solution : Si $\rho(A) < 1$ alors les valeurs propres de A sont toutes de module strictement plus petit que 1. En particulier, 1 n'est pas une valeur propre de A et $I_m - A$ est inversible.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(I_m - A)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} A^k = I_m - A^{n+1}$.

   Solution :

$$(I_m - A)\sum_{k=0}^{n} A^k = \sum_{k=0}^{n} A^k - \sum_{k=0}^{n} A^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} A^k - \sum_{k=1}^{n+1} A^k = I_m - A^{m+1}.$$

4. En déduire le résultat recherché.

   Solution : La question 1 montre l'implication directe. Réciproquement, si $\rho(A) < 1$, alors par les questions 2 et 3, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} A^k = (I_m - A)^{-1}(I_m - A^{n+1})$. Par théorème, puisque $\rho(A) < 1$, la suite $(A^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Ainsi la suite $(\sum_{k=0}^{n} A^k)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et tend vers $(I_m - A)^{-1}$: donc $\displaystyle\sum_n A^n$ converge vers $(I_m - A)^{-1}$.

Exercice 7 On considère la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Déterminer $\mathrm{cond}_1(A)$, $\mathrm{cond}_\infty(A)$ et $\mathrm{cond}_2(A)$.

   Solution : Comme les matrices A et A^{-1} sont diagonales, leurs normes subordonnées $|||\cdot|||_1$, $|||\cdot|||_2$ et $|||\cdot|||_\infty$ coïncident.

$$\mathrm{cond}_1(A) = |||A|||_1 |||A^{-1}|||_1 = 1 \times 10^6 = 10^6 = \mathrm{cond}_\infty(A) = \mathrm{cond}_2(A).$$

2. Résoudre les systèmes

   - $AX = B$ avec $B := \begin{pmatrix} 1 \\ 10^{-6} \end{pmatrix}$,

     Solution : Soit $X \in \mathbb{R}^2$. Comme A est inversible,

$$AX = B \iff X = A^{-1}B \iff X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   - $AY = B + \delta B$ où $\delta B := \begin{pmatrix} 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix}$,

     Solution : Soit $Y \in \mathbb{R}^2$. Comme A est inversible,

$$AY = B+\delta B \iff Y = A^{-1}(B+\delta B) \iff Y = A^{-1}B+A^{-1}\delta B \iff Y = \begin{pmatrix} 1 + 10^{-6} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- $AZ = B + \Delta B$ où $\Delta B := \begin{pmatrix} 0 \\ 10^{-6} \end{pmatrix}$.

  Solution : Soit $Z \in \mathbb{R}^2$. Comme A est inversible,

  $$AZ = B+\Delta B \iff Z = A^{-1}(B+\Delta B) \iff Z = A^{-1}B+A^{-1}\Delta B \iff Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer les erreurs relatives $\frac{\|Y-X\|}{\|X\|}$ et $\frac{\|Z-X\|}{\|X\|}$ pour chacune des normes $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$.

   Solution :

   - $$\frac{\|Y-X\|}{\|X\|} = \frac{\|A^{-1}\delta B\|}{\|X\|} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|}$$

     On trouve donc $\frac{10^{-6}}{2}$ pour la norme $\|\cdot\|_1$, $\frac{10^{-6}}{\sqrt{2}}$ pour la norme $\|\cdot\|_2$, et 10^{-6} pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

   - $$\frac{\|Z-X\|}{\|X\|} = \frac{\|A^{-1}\Delta B\|}{\|X\|} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|}$$

     On trouve donc $\frac{1}{2}$ pour la norme $\|\cdot\|_1$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ pour la norme $\|\cdot\|_2$, et 1 pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. On trouve dans tous ces cas des erreurs relatives inférieures au majorant $\mathrm{cond}(A)\frac{\|\Delta B\|}{\|B\|} = \frac{1}{\|B\|}$ donné par théorème.

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On note λ_M la plus grande valeur propre de A en valeur absolue et λ_m la plus petite valeur propre de A en valeur absolue. Montrer que $\mathrm{cond}_2(A) = \frac{|\lambda_M|}{|\lambda_m|}$.

Solution : Comme A est A^{-1} sont symétriques, leur norme $|||\cdot|||_2$ est leur rayon spectral. Ainsi,

$$\mathrm{cond}_2(A) = |||A|||_2 |||A^{-1}|||_2 = \rho(A)\rho(A^{-1}) = |\lambda_M| \times \frac{1}{|\lambda_m|} = \frac{|\lambda_M|}{|\lambda_m|}.$$

Exercice 9 Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

1. Montrer que, pour tout $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{cond}_2(O) = 1$.

   Solution : Comme O et O^{-1} sont orthogonales,

   $$\mathrm{cond}_2(O) = |||O|||_2 |||O^{-1}|||_2 = \sqrt{\rho({}^tOO)}\sqrt{\rho({}^tO^{-1}O^{-1})} = \sqrt{\rho(I_n)}^2 = 1.$$

2. Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note ${}^tA = \widetilde{Q}\widetilde{R}$ la décomposition "QR" de la transposée ${}^tA$ de A. Montrer que le système $AX = B$, de vecteur inconnu X, est équivalent au système ${}^t\widetilde{Q}X = {}^t\widetilde{R}^{-1}B$.

   Solution : Soit $X \in \mathbb{R}^n$. Comme A inversible, la matrice $\widetilde{R}$ l'est aussi et on a

$$AX = B \iff {}^t(\widetilde{Q}\widetilde{R})X = B \iff {}^t\widetilde{R}{}^t\widetilde{Q}X = B \iff {}^t\widetilde{Q}X = {}^t\widetilde{R}^{-1}B.$$

3. Que peut-on dire du conditionnement de ce dernier système ?

   Solution : Comme ${}^t\widetilde{Q}$ est orthogonale, le conditionnement de ce dernier système est $\mathrm{cond}_2({}^t\widetilde{Q}) = 1$ par la première question. Ce système est donc bien conditionné. Mais, noter qu'une incertitude sur B peut induire une grande incertitude sur le second membre ${}^t\widetilde{R}^{-1}B$ du nouveau système si la norme de ${}^t\widetilde{R}^{-1}$ est grande.