Feuille de TD 6 : Normes matricielles subordonnées, rayon spectral, conditionnement

Exercice 1 Déterminer les normes $\|\cdot\|_1$, $|||\cdot|||_1$, $\|\cdot\|_\infty$, $|||\cdot|||_\infty$ des matrices $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ et $B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 2 Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Toute norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est-elle une norme subordonnée ?
2. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que, pour tous $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $\|AB\| = \|A\|\|B\|$?

Exercice 3 Déterminer le rayon spectral des matrices

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 4 Déterminer les normes $\|\cdot\|_2$ et $|||\cdot|||_2$ des matrices $C := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ et $D := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 5 Pour chacune des matrices A suivantes, la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$. Le but de l'exercice est de montrer que la série $\sum_n A^n$ de $\mathrm{M}_m(\mathbb{K})$ converge si et seulement si $\rho(A) < 1$.

1. Montrer que si la série $\sum_n A^n$ converge alors $\rho(A) < 1$.
2. Montrer que si $\rho(A) < 1$ alors la matrice $I_m - A$ de $\mathrm{M}_m(\mathbb{K})$ est inversible.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(I_m - A)\sum_{k=0}^{n} A^k = I_m - A^{n+1}$.

4. En déduire le résultat recherché.

Exercice 7 On considère la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Déterminer $\mathrm{cond}_1(A)$, $\mathrm{cond}_\infty(A)$ et $\mathrm{cond}_2(A)$.

2. Résoudre les systèmes

   - $AX = B$ avec $B := \begin{pmatrix} 1 \\ 10^{-6} \end{pmatrix}$,
   - $AY = B + \delta B$ où $\delta B := \begin{pmatrix} 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix}$,
   - $AZ = B + \Delta B$ où $\Delta B := \begin{pmatrix} 0 \\ 10^{-6} \end{pmatrix}$.

3. Déterminer les erreurs relatives $\frac{\|Y-X\|}{\|X\|}$ et $\frac{\|Z-X\|}{\|X\|}$ pour chacune des normes $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On note λ_M la plus grande valeur propre de A en valeur absolue et λ_m la plus petite valeur propre de A en valeur absolue. Montrer que $\mathrm{cond}_2(A) = \frac{|\lambda_M|}{|\lambda_m|}$.

Exercice 9 Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

1. Montrer que, pour tout $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{cond}_2(O) = 1$.

2. Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note ${}^tA = \widetilde{Q}\widetilde{R}$ la décomposition "QR" de la transposée ${}^tA$ de A. Montrer que le système $AX = B$, de vecteur inconnu X, est équivalent au système ${}^t\widetilde{Q}X = {}^t\widetilde{R}^{-1}B$.

3. Que peut-on dire du conditionnement de ce dernier système ?