Exercice 1 1. Écrire si possible la matrice $A := \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ sous la forme PDP^{-1} où D est une matrice diagonale et P inversible.

Solution : Les valeurs propres de A sont 6 et -1 et les vecteurs propres associés $e_1 + e_2$ et $3e_1 - 4e_2$. Donc avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, on obtient

$$A = PDP^{-1}.$$

2. Montrer que la matrice $B := A/6$ est stochastique et primitive.

Solution : Les coefficient de B sont tous strictement positifs : B est donc strictement positive, donc primitive. De plus, la somme des coefficients sur chaque ligne de B est 1 : la matrice B est donc stochastique.

3. Calculer B^k et sa limite.

Solution : Soit $k \in \mathbb{N}$

$$B^k = \left(\frac{A}{6}\right)^k = P\left(\frac{D}{6}\right)^k P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & (\frac{-1}{6})^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

La suite (B^k) a donc pour limite

$$P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

stochastique et strictement positive, avec un vecteur d'état $(4/7, 3/7)$ comme le prévoit le théorème de Perron.

4. Montrer que l'endomorphisme c de $\mathbb{R}^2$ de matrice $C = {}^tA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique admet une base (f_1, f_2) de vecteurs propres.

Solution : Puisque A est diagonalisable, $C = {}^tA$ l'est aussi. On notera f_1 un vecteur propre de c de valeur propre 6 et f_2 un vecteur propre de c de valeur propre -1.

5. Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Montrer que la suite $\left(\frac{c}{6}\right)^k(v)$ tend vers un vecteur de l'espace propre $E_1(\frac{c}{6})$.

Solution : Il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $v = xf_1 + yf_2$. Ainsi

$$\left(\frac{c}{6}\right)^k(v) = \left(\frac{c}{6}\right)^k(xf_1 + yf_2) = x\left(\frac{6}{6}\right)^k f_1 + y\left(\frac{-1}{6}\right)^k f_2 = xf_1 + y\left(\frac{-1}{6}\right)^k f_2$$

qui tend vers $xf_1 \in E_1(c/6)$.

6. Représenter graphiquement le cône image du premier cadran $Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0$ et $y > 0\}$ par l'application linéaire c de matrice $C = {}^tA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Représenter les cônes images de Q par c^2 et c^3.

Solution : L'image du premier cadran par c est le cône positif délimité par les vecteurs $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. La matrice C^2 est $\begin{pmatrix} 21 & 20 \\ 15 & 14 \end{pmatrix}$. L'image du premier cadran par c^2 est le cône positif délimité par les vecteurs $\begin{pmatrix} 21 \\ 15 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 20 \\ 14 \end{pmatrix}$. La matrice C^3 est $\begin{pmatrix} 123 & 116 \\ 93 & 88 \end{pmatrix}$. L'image du premier cadran par c^2 est le cône positif délimité par les vecteurs $\begin{pmatrix} 123 \\ 93 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 116 \\ 88 \end{pmatrix}$.

7. Vérifier que les cônes s'approchent du vecteur d'état de B.

Solution : Comme $\frac{3}{4} = 0.75$ et $\frac{15}{21} = 0,71$, $\frac{20}{14} = 0.7$ puis $\frac{93}{123} = 0,756$ et $\frac{88}{116} = 0,7586$, on peut affirmer que les cônes images par c^2 et c^3 sont proches du vecteur d'état. L'image de tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ à coefficients strictement positifs par $c/6$ et ses puissances s'approche du vecteur propre de $c/6$ de valeur propre 1 dominante et donc vecteur d'état de B.