Feuille de TD 7 : Matrices stochastiques et théorèmes de Perron-Frobenius

Exercice 1 Soient $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la matrice A est positive si et seulement si pour tout vecteur $v \geqslant 0$ de $\mathbb{R}^n$, $Av \geqslant 0$.

   Solution : Supposons que la matrice $A = (a_{i\,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ soit positive et soit $v = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées positives ou nulles. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a

   $$(Av)_i = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{a_{i\,j}}_{\geqslant 0} \underbrace{x_j}_{\geqslant 0} \geqslant 0,$$

   donc $Av \geqslant 0$.

   Réciproquement, supposons que, pour tout vecteur $v \geqslant 0$ de $\mathbb{R}^n$, $Av \geqslant 0$, et notons $e_1, \dots, e_n$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $j \in \{1, \dots, n\}$, alors $e_j \geqslant 0$ et donc $Ae_j \geqslant 0$, le vecteur Ae_j étant la $j^{\text{ème}}$ colonne de A. Ainsi, tous les coefficients de la matrice A sont positifs ou nuls i.e. A est une matrice positive.

2. Montrer que la matrice A est strictement positive si et seulement si pour tout vecteur $v \geqslant 0$ non nul de $\mathbb{R}^n$, $Av > 0$.

   Solution : Supposons que la matrice $A = (a_{i\,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ soit strictement positive et soit $v = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées positives ou nulles. En particulier, il existe un indice $j_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x_{j_0} > 0$. Alors, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a

   $$(Av)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} x_j = \underbrace{a_{i\,j_0}}_{>0} \underbrace{x_{j_0}}_{>0} + \sum_{j \neq j_0} \underbrace{a_{i\,j}}_{>0} \underbrace{x_j}_{\geqslant 0} > 0,$$

   donc $Av > 0$.

   Réciproquement, supposons que, pour tout vecteur $v \geqslant 0$ non nul de $\mathbb{R}^n$, $Av > 0$. Employant les mêmes notations que dans la question précédente, si $j \in \{1, \dots, n\}$, les coordonnées du vecteur e_j sont positives ou nulles et non toutes nulles, donc $Ae_j > 0$. Comme le vecteur Ae_j est la $j^{\text{ème}}$ colonne de A, on obtient que tous les coefficients de la matrice A sont strictement positifs i.e. que A est une matrice strictement positive.

Exercice 2 1. Donner un exemple de matrice positive non nulle de $M_2(\mathbb{R})$ dont le rayon spectral est nul.

Solution : Considérons la matrice $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Le polynôme caractéristique de A est X^2, A possède donc une unique valeur propre égale à 0 et son rayon spectral est donc 0.

2. Donner un exemple de matrice positive non nulle de $M_2(\mathbb{R})$ dont le rayon spectral est une valeur propre de multiplicité 2.

Solution : Considérons la matrice identité $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $M_2(\mathbb{R})$: son polynôme caractéristique est $(1-X)^2$ et son rayon spectral est donc égal à son unique valeur propre 1, qui est de multiplicité 2.

3. Donner un exemple de matrice positive non nulle de $M_2(\mathbb{R})$ dont le rayon spectral est une valeur propre non dominante.

Solution : Considérons la matrice $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$: le polynôme caractéristique de B est $X^2 - 1 = (1-X)(-1-X)$, ses valeurs propres sont donc 1 et -1, son rayon spectral est 1, et 1 n'est pas une valeur propre dominante de B car $|-1| = 1$.

Exercice 3 Les matrices

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de $M_3(\mathbb{R})$ sont-elles primitives ? Irréductibles ?

Solution :

- On a $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ donc la matrice A est primitive, en particulier irréductible.
- On a $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc la matrice est irréductible, mais non primitive car $B^3 = 2B$ et donc, pour tout $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$,

$$B^k = \begin{cases} 2^{p-1}B^2 & \text{si } k = 2p,\ p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \\ 2^p B & \text{si } k = 2p+1,\ p \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- On a $C^5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ donc la matrice C est primitive, en particulier irréductible.

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive et primitive. En particulier, il existe $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tel que la matrice A^m soit strictement positive.

1. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant m$, la matrice A^k est strictement positive.

   Solution : On montre la propriété par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant m$.

   Le résultat est vrai pour $k = m$. Supposons maintenant la propriété vraie pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant m$ fixé, et considérons la matrice A^{k+1}. Si on note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes, dans l'ordre, de la matrice A, on a

   $$A^{k+1} = A^k \times A = A^k \left(C_1|\cdots|C_n\right) = \left(A^kC_1|\cdots|A^kC_n\right)$$

   Or, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, les coefficients de la colonne C_j de A sont positifs ou nuls (car la matrice A est positive) et non tous nuls (car sinon, pour tout $l \in \mathbb{N}$, la $j^{\text{ème}}$ colonne de A^l serait nulle donc A ne pourrait être primitive) donc, comme A^k est une matrice strictement positive, d'après la question 2. de l'exercice 1, les coefficients du vecteur A^kC_j sont strictement positifs. La matrice A^{k+1} est donc strictement positive.

2. Montrer que la matrice $-A$ est primitive.

   Solution : On a $(-A)^{2m} = A^{2m}$ et cette dernière matrice est strictement positive ($2m \geqslant m$) donc la matrice $-A$ est primitive.

Exercice 5 Etudier les valeurs propres de la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. La matrice A est-elle primitive ? Irréductible ?

Solution : On a $\chi_A = (1-X)(X^2-1) = (1-X)^2(-1-X)$. Ainsi $\mathrm{Sp}(A) = \{-1; 1\}$ et $\rho(A) = 1$ est une valeur propre double de la matrice positive A. D'après les théorèmes de Perron-Frobenius, A ne peut donc être ni primitive ni irréductible.

Exercice 6 On considère la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que la matrice A est irréductible.

   Solution : On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 16 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

   La matrice A est donc irréductible.

2. Vérifier les conclusions du théorème de Frobenius appliqué à la matrice positive et irréductible A en calculant les valeurs propres de A.

   Solution : D'après le calcul précédent, on a $A^4 - 16I_4 = 0$ autrement dit le polynôme $X^4 - 16$ est un polynôme annulateur de A. Comme $X^4 - 16 = (X^2 + 4)(X^2 - 4) = (X - 2i)(X + 2i)(X - 2)(X + 2)$, on a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{2i; -2i; 2; -2\}$ et donc $\rho(A) = 2$. Comme $\det(A + 2iI_4) = \det(A + 2iI_4) = \det(A + 2I_4) = \det(A - 2I_4) = 0$, on a réciproquement $\{2i; -2i; 2; -2\} \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Ainsi $\chi_A = X^4 - 16$, et $\rho(A)$ est bien une valeur propre simple de A. De plus, si $Y \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, $Y \in \mathrm{Ker}\ (A - 2I_4)$ si et seulement si $Y \in \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, et $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre $\rho(A) = 2$ de coordonnées strictement positives.

3. La matrice A est-elle primitive ?

   Solution : La matrice A n'est pas primitive car la valeur propre $\rho(A) = 2$ n'est pas dominante.

Exercice 7 Pour chacune des matrices stochastiques suivantes, déterminer si un vecteur d'état limite existe et, si oui, le déterminer :

$$A := \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,9 \\ 0,1 & 0 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

Solution :

- La matrice A est stochastique et strictement positive (en particulier primitive) : la suite des puissances successives de A converge donc vers une matrice dont toutes les lignes sont identiques, égales au vecteur d'état limite de la matrice A.

  De plus, ce vecteur est l'unique vecteur stochastique $l = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix}$ de $M_{1,2}(\mathbb{R})$ tel que

$$\begin{aligned} {}^tA^tl = {}^tl &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0,4 & 0,9 \\ 0,6 & 0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0,4l_1 + 0,9l_2 &= l_1 \\ 0,6l_1 + 0,1l_2 &= l_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -0,6l_1 + 0,9l_2 &= 0 \\ 0,6l_1 - 0,9l_2 &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow l_1 = \frac{3}{2}l_2,\ l_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

  . Comme

$$l_1 + l_2 = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2}l_2 + l_2 = 1 \Leftrightarrow l_2 = \frac{2}{5},$$

  l'état limite de la matrice stochastique primitive A est le vecteur ligne $l = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

- Comme $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la suite des puissances successives de B ne converge pas, et la matrice B ne possède donc pas d'état limite.

- La matrice C^2 est strictement positive : la matrice stochastique C est donc primitive et la suite des puissances successives de C converge vers une matrice dont toutes les lignes sont des copies du vecteur d'état limite de la matrice C, qui est l'unique vecteur stochastique $l = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix}$ de $M_{1,3}(\mathbb{R})$ tel que

$$\begin{aligned} {}^tC\,{}^tl = {}^tl &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0,6 & 0 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,1 & 0,9 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0,6l_1 & & + 0,1l_3 &= l_1 \\ 0,3l_1 + 0,1l_2 & & &= l_2 \\ 0,1l_1 + 0,9l_2 + 0,9l_3 & & &= l_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -0,4l_1 & & + 0,1l_3 &= 0 \\ 0,3l_1 - 0,9l_2 & & &= 0 \\ 0,1l_1 + 0,9l_2 - 0,1l_3 & & &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} l_1 &= \frac{1}{4}l_3 \\ l_2 &= \frac{1}{12}l_3 \end{cases},\ l_3 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

  Comme

$$l_1 + l_2 + l_3 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}l_3 + \frac{1}{12}l_3 + l_3 = 1 \Leftrightarrow l_3 = \frac{3}{4},$$

l'état limite de la matrice stochastique primitive C est le vecteur ligne $l = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice $L \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $AL = LA = L$.

   Solution : Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $A \times A^k = A^k \times A = A^{k+1}$. Or la suite $\left(A^{k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge également vers L et l'application qui à toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ associe son produit à gauche par A est continue sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ainsi que l'application qui à toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ associe son produit à droite par A, donc

$$\begin{aligned} \lim_{k\to+\infty}\left(A \times A^k\right) = \lim_{k\to+\infty}\left(A^k \times A\right) = \lim_{k\to+\infty}\left(A^{k+1}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad A \times \lim_{k\to+\infty}\left(A^k\right) = \lim_{k\to+\infty}\left(A^k\right) \times A = \lim_{k\to+\infty}\left(A^{k+1}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad AL = LA = L. \end{aligned}$$

2. En déduire que

   (a) toute colonne de L est soit nulle soit un vecteur propre de A,

   Solution : Ecrivons $L = \left(C_1|\cdots|C_n\right)$ où $C_1, \ldots, C_n \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont les colonnes de L. Alors

$$AL = L \Leftrightarrow \left(AC_1|\cdots|AC_n\right) = \left(C_1|\cdots|C_n\right) \Leftrightarrow \forall j \in \{1, \ldots, n\}, AC_j = C_j.$$

   Ainsi, pour $j \in \{1, \ldots, n\}$, si le vecteur C_j n'est pas nul, il s'agit d'un vecteur propre de A (pour la valeur propre 1).

   (b) toute ligne de L est soit nulle soit un vecteur propre de ${}^tA$.

   Solution : Notons $L_1, \ldots, L_n$ les lignes de L (dans l'ordre). Alors

$$\begin{aligned} LA = L \Leftrightarrow {}^t(LA) = {}^tL \Leftrightarrow {}^tA{}^tL = {}^tL \quad &\Leftrightarrow \quad \left({}^tA{}^tL_1|\cdots|{}^tA{}^tL_n\right) = \left({}^tL_1|\cdots|{}^tL_n\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}, {}^tA{}^tL_i = {}^tL_i. \end{aligned}$$

   Ainsi, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, si le vecteur ${}^tL_i$ n'est pas nul, il s'agit d'un vecteur propre de ${}^tA$ (pour la valeur propre 1).