Feuille de TD 8 : Méthode LU

Exercice 1 *Résoudre le système $Ax = b$, la décomposition LU de A étant donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad et \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 *Donner la décomposition LU des matrices suivantes*

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 *Soit A la matrice* $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1. *Est-ce que A admet une décomposition LU ?*
2. *Montrer que la décomposition LU de la matrice obtenue en permutant les lignes 1 et 2 de la matrice A s'écrit $PA = LU$, où P est une matrice élémentaire. Déterminer P, L et U.*
3. *Résoudre le système $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ à l'aide de la décomposition $PA = LU$.*

Exercice 4 *Soit A la matrice* $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. *Est-ce que A admet une décomposition LU ? Si non, trouver une matrice inversible P telle que PA admette une décomposition LU, et calculer la.*

Exercice 5 *Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$