Université Aix–Marseille | Semestre 7
Master de Mathématiques 2024–2025 | Probabilités

Examen + corrigé

Durée 2h, sans document

---

1. Vrai ou Faux ?

(A) *Est-ce que* $\varphi(x) = \cos x$ *est la fonction caractéristique d'une loi de probabilité ?* **OUI**

(B) *Est-ce que* $\varphi(x) = 2\cos x - 1$ *est la fonction caractéristique d'une loi de probabilité ?* **NON**

Soit (X_n) *variables aléatoires réelles.*

(C) *Si* $\varphi_{X_n} \to 1$ *sur* $\mathbb{R}$*, alors* $X_n \xrightarrow{P} 0$. **OUI** (Thm 17 + Ex 67)

(D) *Si* $X_n \to 0$ *p.s., alors* $F_{X_n} \to 1|_{[0,\infty[}$ *sur* $\mathbb{R}$. **NON**

(E) *Si* $X_n \to 0$ *en loi, alors* $X_n \to 0$ *p.s.* **NON** (Ex 61 + Ex 67)

(F) *Si* $F_{X_n} \to 1|_{[0,\infty[}$ *sur* $\mathbb{R}$*, alors* $\varphi_{X_n} \to 1$ *sur* $\mathbb{R}$. **OUI** (Thm 14 + Thm 17)

Exercice 2.

Soit $X_1, \dots, X_n$ *variables aléatoires réelles indépendantes uniformes sur* $[0,2]$*. Soit* $Y_n = (X_1 \cdot \ldots \cdot X_n)^{1/n}$*. Trouver la limite p.s. de* Y_n *quand* $n \to \infty$.

Soit $H_k = \ln X_k$. Alors H_k sont i.i.d.,

$$E(H_1) = \frac{1}{2}\int \ln(t)\,dt = \ln 2 - 1,\ E(H_1^2) = \frac{1}{2}\int \ln^2(t)\,dt < \infty,\ \mathrm{Var}(H_1) < \infty.$$

Par la loi forte des grands nombres, nous avons p.s.

$$\frac{1}{n}\sum_{1\le k\le n} H_k \to E(H_1) = \ln 2 - 1.$$

Donc, p.s.

$$Y_n = \prod_{1\le k\le n} X_k^{1/n} = \prod_{1\le k\le n} e^{H_k/n} \to \exp E(H_1) = \frac{2}{e}.$$

Exercice 3.

Trouver des variables aléatoires réelles indépendantes (Z_n) *telles que* $\sum_{n\geq 1} Z_n$ *converge p.s. et* $\sum_{n\geq 1} \mathrm{Var}(Z_n) = \infty$.

Par le théorème des trois séries il nous faut que $\sum_{n\geq 1} P(|Z_n| > 1) < \infty$, $\sum_{n\geq 1} E(Z_n^1) < \infty$, $\sum_n \mathrm{Var}(Z_n^1) < \infty$ et $\sum_{n\geq 1} \mathrm{Var}(Z_n) = \infty$. Un exemple possible est $Z_n \sim n^{-2}\delta_n + (1 - n^{-2})\delta_0$.

Exercice 4.

Soit R *la distance entre deux points choisi au hasard dans un carré de côté* $A > 0$ *dans* $\mathbb{R}^2$. *Trouver* $E(R^2)$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ deux points choisi au hasard dans le carré $\{(x, y) \in \mathbb{R} : 0 < x < A,\ 0 < y < A\}$. Alors

$$E(R^2) = \frac{1}{A^4} \int_0^A \int_0^A \int_0^A \int_0^A \big((x - x')^2 + (y - y')^2\big)\, dx\, dy\, dx'\, dy'$$
$$= \frac{4}{A} \int_0^A x^2\, dx - \frac{4}{A^2} \int_0^A \int_0^A xx'\, dx\, dx' = \frac{4}{3} A^2 - \frac{4}{A^2} \int_0^A x\, dx \int_0^A x'\, dx' = \frac{A^2}{3}.$$

Exercice 5.

Soit (U_n) *variables aléatoires indépendantes suivantes la loi* $(1/2)(\delta_{-1} + \delta_1)$,

$$V_n = \frac{1}{n} \sum_{1\leq k\leq n} \sqrt{k} U_k.$$

Trouver la limite en loi de V_n.

Comme $\varphi_{U_k}(t) = \cos t$ et $\varphi_{\sqrt{k}U_k/n}(t) = \cos(\sqrt{k}t/n)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous avons

$$\begin{aligned}
\varphi_{V_n}(t) &= \prod_{1\le k\le n} \cos(\sqrt{k}t/n) = \prod_{1\le k\le n} \Big(1 - \frac{kt^2}{2n^2} + O\Big(\frac{k^2t^4}{n^4}\Big)\Big) \\
&= \prod_{1\le k\le n} \exp\Big(-\frac{kt^2}{2n^2} + O\Big(\frac{k^2t^4}{n^4}\Big)\Big) = \exp \sum_{1\le k\le n} \Big(-\frac{kt^2}{2n^2} + O\Big(\frac{k^2t^4}{n^4}\Big)\Big) \\
&= \exp\Big(-\frac{n(n+1)t^2}{4n^2} + O\Big(\frac{n^3t^4}{n^4}\Big)\Big) \to \exp\Big(-\frac{t^2}{4}\Big), \qquad n\to\infty.
\end{aligned}$$

Donc, la limite en loi de V_n est $\mathcal{N}(0, 1/2)$.

Exercice 6.

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes suivant la loi $\mathcal{N}(0,n)$, $n\ge 1$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Montrer que p.s.

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n\sqrt{\ln\ln n}} \le 1.$$

Comme X_n est la somme de n variables aléatoires réelles indépendantes, $X_n = T_{n(n-1)/2+1} + \ldots + T_{n(n+1)/2}$ suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$, nous avons $S_n = W_{n(n+1)/2}$ où $W_k = T_1 + \ldots + T_k$.

Par la loi du logarithme itéré, p.s.

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{W_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}} = 1$$

et donc

$$1 \ge \limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n(n+1)\ln\ln(n(n+1)/2)}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n\sqrt{\ln\ln n}}.$$