

INTRODUCTION AUX ALGORITHMES DE FRACTION CONTINUE MULTIDIMENSIONNELLE.

Mélodie Andrieu

Ecole Jeunes Chercheurs en Informatique Mathématique
10 juin 2021, en ligne

I- L'algorithme de fraction continue

[en dimension 1]

1) Les Fractions continues, qu'est-ce que c'est ?

"Fraction continue" = façon de **représenter** les nb **réels** par des suites infinies d'entiers.

↳ Contrairement à l'écriture en base 2, 10, n , ..., les entiers ne sont **pas**, a priori, **bornés**.

Ex:

	écriture décimale	dvp en FC
$19/12$	$1,5\overline{8}33333 \dots$ ↗ "chiffre"	$[1; 1, 1, \overline{2}, 2]$ ↗ "quotient partiel"
$\sqrt{13}$	$3,605551275 \dots$	$[3; 1, 1, 6, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 16 \dots]$
π	$3,1415926535 \dots$	$[3; 5, 15, 1, 292, 1, \dots]$
φ (nb d'or)	$1,618033988 \dots$	$[1; 1, 1, 1, 1, \dots]$

2) Comment retrouver x à partir de son dvp en FC ?

Soit $x \in \mathbb{R}^+$

• écriture décimale :

$$\dots 0d_{-m} \dots d_{-1}d_0d_1d_2d_3\dots \quad d_i \in \{0, \dots, 9\} \rightsquigarrow x = \sum_{j=-m}^{+\infty} d_j 10^{-j}$$

• dvp en FC :

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$$

$$a_i \in \mathbb{N}$$

$$\rightsquigarrow x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\dots}}}}$$

Ex: $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}} = 19/12$

3) Comment calculer le dvp en FC d'on réel ?

Le dvp en FC est fondé sur l' **algorithme d'Euclide** [soustractif].

$$F: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$(y, z) \rightarrow \begin{cases} (y-z, z) & \text{si } y \geq z \quad (\text{cas 1}) \\ (y, z-y) & \text{sinon} \quad (\text{cas 2}) \end{cases}$$



Ex: $(19, 12) \xrightarrow{1} (7, 12) \xrightarrow{2} (7, 5) \xrightarrow{1} (2, 5) \xrightarrow{2} (2, 3) \xrightarrow{2} (2, 1) \xrightarrow{1} (1, 1) \xrightarrow{1} (0, 1) \xrightarrow{2}$

↑
pgcd(19, 12)

def: { La trajectoire symbolique de (19, 12) pour l'itération de F [relativement à sa définition par morceaux] est: **1 2 1 2 2 1 2 2 2 2 2 2 ...** }

3) Comment calculer le dvp en FC d'un réel? (suite)

$$F: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

$$(y, z) \mapsto \begin{cases} (y-z, z) & \text{si } y \geq z \quad (\text{cas 1}) \\ (y, z-y) & \text{sinon} \quad (\text{cas 2}) \end{cases}$$



Observation: Soit $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$. Les trajectoires symboliques de (y, z) et $\lambda(y, z)$ sont identiques.

Conséquence 1: $\text{traj. symb } (y, z) = \text{traj. symb } (\frac{y}{z}, 1)$. On peut considérer que F est définie sur le **cône projectif** $(\mathbb{R}^+)^2 / \mathbb{R}_*^+$

Conséquence 2: $y/z \in \mathbb{Q} \iff$ la traj. symb. de (y, z) est **ultimement constant**.

3) Comment calculer le dup en FC d'un réel? (suite et fin)

def: Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Le développement en fraction continue de x est:
 $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$, où les a_i sont déterminés de façon unique par:

(i) $a_1, a_2, a_3, \dots \neq 0$

(ii) $1^{a_0} 2^{a_1} 1^{a_2} 2^{a_3} \dots$ est la trajectoire symbolique de $(x, 1)$ sous F .

Convention: $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_m \infty] = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_m]$

Ex: $x = 19/12$.

traj. symbolique de $(19/12, 1) = \text{traj. symb de } (19, 12)$

$$\begin{aligned} &= \overbrace{1}^{\text{red}} \overbrace{2}^{\text{blue}} \overbrace{1}^{\text{red}} \overbrace{22}^{\text{blue}} \overbrace{11}^{\text{red}} \overbrace{22222}^{\text{blue}} \dots \\ &= 1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Donc le dup en FC de $19/12$ est: $[1; 1, 1, 2, 2]$. $\checkmark$

4) Intérêt des fractions continues.

Le développement en fractions continues :

et c'est algorithmique!

- caractérise les rationnels:

$$x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \text{dvp en FC fini}$$

- caractérise les réels quadratiques:

Th de LAGRANGE :
[Gauss, Galois]
~ 1800

x quadratique $\Leftrightarrow$ dvp en FC
périodique à
partir d'un
certain rang

- $\left\{ \begin{array}{l} - \exists P \in \mathbb{Z}[X] \text{ tq } P(x) = 0 \dots \\ - \text{le deg min d'un tel } P \text{ est } 2 \end{array} \right.$

- Fournit les **MEILLEURES** approximations diophantiniennes

.....ie approximation de $x \in \mathbb{R}$ par $p/q \in \mathbb{Q}$.

Soit $x = [a_0; a_1 a_2 \dots] \in \mathbb{R}^+$. Notons $\frac{p_m}{q_m} := [a_0; a_1 \dots a_m]$

ALORS:

$$1) \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}$$

$\leadsto$ "c'est une bonne approx"

$$2) \text{ si } \frac{p}{q} \text{ est tel que } |qx - p| < |q_m x - p_m|$$

$$\text{alors } q \geq q_m.$$

$\leadsto$ "on ne trouvera pas mieux
sans augmenter q "

II - Algorithmes de fraction continue multidimensionnelle

1) Motivations

- idée de **Jacobi** (XIX^es.) qui espère caractériser les réels cubiques.
- un tel algo pourrait fournir des approximations diophantiennes simultanées des couples de réels.

2) Comment faire ?

On pourrait définir un "algorithme d'Euclide" sur 3 entrées.

Plusieurs possibilités :

- soustraire le petit au moyen et le moyen au grand
- soustraire le petit au grand
- soustraire le petit et le moyen au grand
- etc.

Poincaré 1884

Selmer 1961

Arnaud-Rauzy 1991

Comment choisir ? Les étudier.

3) Une approche "récente": étudier les mots infinis associés aux algo. de fraction continue multi D.

Notions générales de combinatoire des mots

def: { . Un alphabet est un ensemble fini A .
 . Un mot de longueur n est un élément de A^n .
 $A^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$
 . Un mot infini est un élément de $A^{\mathbb{N}}$.

ex: $A = \{1, 2\}$

ex: $u = 122$

On munit A^* et $A^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit.

def: Une substitution est un élément de $\text{End}((A^*, \cdot))$

Ex: $\sigma_1 : \begin{matrix} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 12 \end{matrix}$

$$\sigma_1(122) = 1 \cdot 12 \cdot 12 = 11212$$

4) Mots associés à l'algo 1D : mots sturmien.

$$a \quad F: (y, z) \rightarrow \begin{cases} (y-z, z) & \text{si } y \geq z \\ (z, z-y) & \text{sinon} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{cas 1} \\ \text{cas 2} \end{matrix}, \text{ on associe 2 substitutions:}$$
$$\begin{aligned} \cdot \sigma_1: & \begin{matrix} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 12 \end{matrix} \\ \cdot \sigma_2: & \begin{matrix} 1 \rightarrow 21 \\ 2 \rightarrow 2 \end{matrix} \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^+$. Notons $(i_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{1, 2\}^{\mathbb{N}}$ la traj. symb de $(x, 1)$ pour F .

Fait: Soit $a \in \{1, 2\}$. Si $x \notin \mathbb{Q}$ alors
la suite $(\sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} \circ \dots \circ \sigma_{i_n}(a))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un mot infini
 $w_x \in \{1, 2\}^{\mathbb{N}}$ qui ne dépend pas de a .

def: Ces mots s'appellent mots sturmien standards

Ex: $x = \varphi$ donne $(i_n) = 12121212\dots$

$$w_\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} \circ \sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} \circ \sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} \dots (1) = 121121211211212112\dots$$

↑
"mot de Fibonacci"

5) Mots sturmien (suite)

Morse - Hedlund 1940.

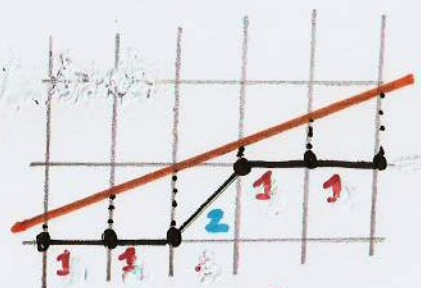
Les mots sturmien jouissent de propriétés **combinatoires**, **géométriques** et **dynamiques** remarquables.

mot formé grâce
à m lettres
consécutives de w

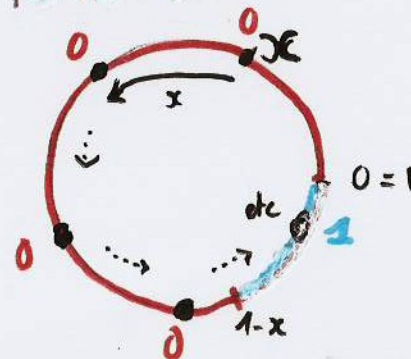
[complexité] w est sturmien ssi w admet exactement $m+1$ facteurs de longueur m , $\forall m$.

[équilibre] w est sturmien ssi w est aperiodique et tout couple de facteurs de $\hat{m}$ longueur admet, à un près, le $\hat{m}$ nb de 1 (et donc à un près aussi, le $\hat{m}$ nb de 2).

[droite discrète] Le mot sturmien associé à $x \notin \mathbb{Q}$ est la "digitalisation" de la droite de pente x .



[codage de rotation] Le mot sturmien associé à x est une trajectoire symbolique par la rotation du cercle d'angle x .



etc.

6) Une approche "récente": étudier les mots infinis associés aux algo. de fraction continue multi D.

~60 ans

Idee: Etant donné un algo de FC en dim d , noté F_d ,

- proposer k substitutions sur l'alphabet $\{1 \dots d\}$ associées à la définition en k morceaux de F_d .
- étudier les propriétés combinatoires, dynamiques et arithmétiques des mots

$$w(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{i_1} \circ \dots \circ \sigma_{i_n}(a)$$

$a \in \{1 \dots d\}$, où $(i_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{1 \dots k\}^{\mathbb{N}}$ est la trajectoire symbolique d'un d -uplet x pour F_d .

7) Sur un exemple: algorithme de FC multiD d'Arnoux - Rauzy (1991)

$$\text{FAR: } (x, y, z) \longrightarrow \begin{cases} (x-y-z, y, z) & \text{si } x > y+z \\ (x, y-x-z, z) & \text{si } y > x+z \\ (x, y, z-x-y) & \text{si } z > x+y \end{cases}$$

$\sigma_1: \begin{matrix} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 12 \\ 3 \rightarrow 13 \end{matrix}$

$\sigma_2: \begin{matrix} 1 \rightarrow 21 \\ 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 23 \end{matrix}$

$\sigma_3: \begin{matrix} 1 \rightarrow 31 \\ 2 \rightarrow 32 \\ 3 \rightarrow 3 \end{matrix}$

Ex: $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots (1) = 1213121121312121 \dots$ "mot de Tribonacci"

Quelques résultats:

- Presque tout mot d'Arnoux - Rauzy est équilibré Delecroix, Hejda, Steiner 2013
 $\implies$ mais il existe des exceptions Cassaigne Ferenczi Zamboni 2001 ; A. 2021
- Presque tout mot d'Arnoux - Rauzy est un "bon" codage de rotation du tore Berthé Steiner Thurwaldener 2019
- Th: $\dim \mathbb{Q}x + \mathbb{Q}y + \mathbb{Q}z = R \iff R$ substitutions apparaissent infirment souvent dans la traj. symb. de (x, y, z) pour FAR.

Conjecturé par Arnoux et Staroska en 2013; prouvé en 2021 par $\begin{cases} \text{Dyannikov, Hubert, Skipchenko} \\ \text{A.} \end{cases}$

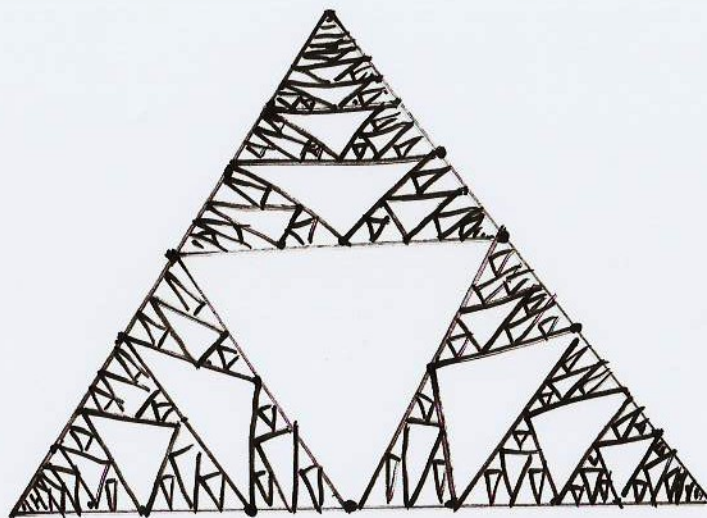
Mais...

- F_{AR} n'est pas défini partout.



- L'ensemble sur lequel F_{AR} peut être itérée indéfiniment...

... est de **MESURE NULLE.**



La baderne de Rauzy.

Merci !