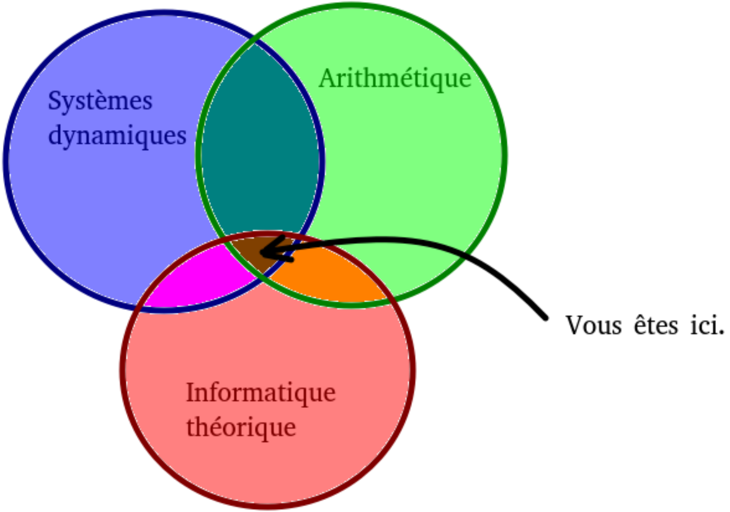
Algorithmes de fractions continues multidimensionnelles et mots infinis

Mélodie Andrieu

Séphora Berrebi Scholarships

4 octobre 2021

Institut Henri Poincaré, Paris


Systèmes dynamiques
Arithmétique
Informatique théorique
Vous êtes ici.

I - Pourquoi ?

II - Quoi ?

III - Comment ?

I. Motivations

Fractions continues = système de numération fondé sur l'algorithme d'Euclide.

Il fournit les meilleures approximations des nombres réels (ex: π, φ, $\sqrt{2}$, ...) par des ratios d'entiers.

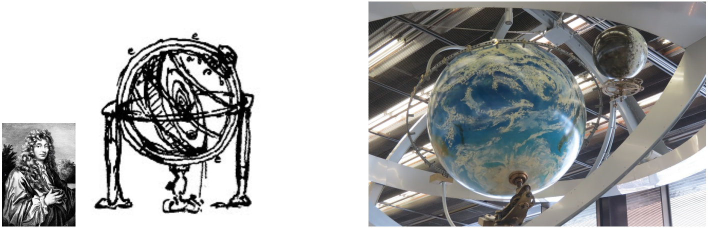


Figure: Automate planétaire imaginé par C. Huygens (1686); une réalisation à l'aéroport d'Orly.

Elles sont à l'origine de nombreux résultats:
- en mathématiques: caractérisation des nombres quadratiques (Lagrange, Galois), construction des premiers nombres transcendants (Liouville),...
- en informatique: digitalisation des droites.

Depuis le XIXe siècle, on cherche à les généraliser aux dimensions supérieures, afin :
- d'approximer *simultanément* des couples de nombres réels
- de discrétiser des plans

Plusieurs algorithmes ont été proposés:
Jacobi-Perron (1868/1907), Poincaré, Brun (1957), Arnoux-Rauzy (1991), Cassaigne-Selmer (1961/2017)...

$\longrightarrow$ Sont-ils satisfaisants ? Lequel choisir ?

Programme général : étudier ces algorithmes du point de vue des systèmes dynamiques symboliques (= mots infinis) qu'ils engendrent.

Ma contribution : détecter & étudier les systèmes exceptionnels associés à une anomalie de convergence : le déséquilibre.

II - Une contribution

Théorème [A. 20]

Il existe un mot d'Arnoux-Rauzy dont le fractal de Rauzy n'est contenu dans aucune bande du plan.

[dim 1] Fractions continues et mots sturmiens [~1940]

A l'algorithme de fractions continues usuel

$$F: \begin{array}{ccll} (\mathbb{R}^+)^2 & \to & (\mathbb{R}^+)^2 & \\ (x,y) & \mapsto & (x-y,y) & \text{si } x \geq y, \\ & & (x,y-x) & \text{sinon ;} \end{array}$$

est associée une classe de mots infinis binaires appelés **mots sturmiens**.

"Mot infini" = suite infinie d'éléments pris dans un ensemble fini ["alphabet"]

Ex : w = 0100100100010000100001...

"Facteur de longueur n" = sous-mot constitué de n lettres *consécutives*

Ex : - 00 est facteur de w
- `art` est facteur de `montmartre`

[dim 1] Fractions continues et mots sturmiens [∼1940]

A l'algorithme de fractions continues usuel

$$F: \begin{array}{ccll} (\mathbb{R}^+)^2 & \to & (\mathbb{R}^+)^2 & \\ (x,y) & \mapsto & (x-y,y) & \text{si } x \geq y, \\ & & (x,y-x) & \text{sinon ;} \end{array}$$

est associée une classe de mots infinis binaires appelés **mots sturmiens**.

"Mot infini" = suite infinie d'éléments pris dans un ensemble fini ["alphabet"]

Ex : w = 0100100100010000100001...

"Facteur de longueur *n*" = sous-mot constitué de n lettres *consécutives*

Ex : - 00 est facteur de w
- art est facteur de montmartre

[dim 1] Fractions continues et mots sturmiens [∼1940]

A l'algorithme de fractions continues usuel

$$F : \begin{array}{ccll} (\mathbb{R}^+)^2 & \to & (\mathbb{R}^+)^2 & \\ (x, y) & \mapsto & (x - y, y) & \text{si } x \geq y, \\ & & (x, y - x) & \text{sinon ;} \end{array}$$

est associée une classe de mots infinis binaires appelés **mots sturmiens**.

"Mot infini" = suite infinie d'éléments pris dans un ensemble fini ["alphabet"]

Ex : w = 0100100100010000100001...

"Facteur de longueur *n*" = sous-mot constitué de *n* lettres *consécutives*

Ex : - 00 est facteur de *w*
- art est facteur de montmartre

[dim 1] Fractions continues et mots sturmiens [∼1940]

A l'algorithme de fractions continues usuel

$$F: \begin{array}{ccll} (\mathbb{R}^+)^2 & \to & (\mathbb{R}^+)^2 & \\ (x,y) & \mapsto & (x-y,y) & \text{si } x \geq y, \\ & & (x, y-x) & \text{sinon ;} \end{array}$$

est associée une classe de mots infinis binaires appelés **mots sturmiens**.

"Mot infini" = suite infinie d'éléments pris dans un ensemble fini ["alphabet"]

Ex : w = 0100100100010000100001...

"Facteur de longueur n**"** = sous-mot constitué de n lettres *consécutives*

Ex : - 00 est facteur de w
- `art` est facteur de `montmartre`

[dim 1] Fractions continues et mots sturmiens [∼1940]

A l'algorithme de fractions continues usuel

$$F: \begin{array}{ccll} (\mathbb{R}^+)^2 & \to & (\mathbb{R}^+)^2 & \\ (x,y) & \mapsto & (x-y,y) & \text{si } x \geq y, \\ & & (x,y-x) & \text{sinon ;} \end{array}$$

est associée une classe de mots infinis binaires appelés **mots sturmiens**.

"Mot infini" = suite infinie d'éléments pris dans un ensemble fini ["alphabet"]

Ex : w = 0100100010000100000 1...

"Facteur de longueur n" = sous-mot constitué de n lettres *consécutives*

Ex : - 00 est facteur de w
- `art` est facteur de `montmartre`

[dim 1] Fractions continues et mots sturmiens [∼1940]

Les mots sturmiens jouissent de nombreuses caractérisations [combinatoire, géométrique, dynamique].

Par l'équilibre :
Les mots sturmiens sont exactement les mots binaires apériodiques dans lesquels tous les facteurs de même longueur contiennent, à un près, le même nombre de 0.

Ex :

Un mot commençant par $w = 0010001001000010001001\dots$ peut être sturmien.

Un mot commençant par $w = 0\underline{11}0111\underline{00}$... ne l'est pas.

[dim 1] Fractions continues et mots sturmiens [~1940]

Les mots sturmiens jouissent de nombreuses caractérisations [combinatoire, géométrique, dynamique].

Par l'équilibre :
Les mots sturmiens sont exactement les mots binaires apériodiques dans lesquels tous les facteurs de même longueur contiennent, à un près, le même nombre de 0.

Ex :

Un mot commençant par $w = 0010001001000010001001\ldots$ peut être sturmien.

Un mot commençant par $w = 0\underline{11}0111\underline{00}$... ne l'est pas.

[dim 1] Fractions continues et mots sturmiens [∼1940]

Les mots sturmiens jouissent de nombreuses caractérisations [combinatoire, géométrique, dynamique].

Par l'équilibre :
Les mots sturmiens sont exactement les mots binaires apériodiques dans lesquels tous les facteurs de même longueur contiennent, à un près, le même nombre de 0.

Ex :

Un mot commençant par $w = 0010001001000010001001\ldots$ peut être sturmien.

Un mot commençant par $w = 0\underline{11}0111\underline{00}\ldots$ ne l'est pas.

[dim 1] Fractions continues et mots sturmiens [$\sim$1940]

Les mots sturmiens jouissent de nombreuses caractérisations [combinatoire, géométrique, dynamique].

Par l'équilibre :
Les mots sturmiens sont exactement les mots binaires apériodiques dans lesquels tous les facteurs de même longueur contiennent, à un près, le même nombre de 0.

Ex :

Un mot commençant par $w = 0010001001000010001001\ldots$ peut être sturmien.

Un mot commençant par $w = 0\underline{11}011\underline{00}\ldots$ ne l'est pas.

[dim 1] Fractions continues et mots sturmiens [∼1940]

Conséquences : Soit w un mot sturmien.
1.Le nombre d'occurrences de la lettre 0 parmi les N premières lettres de w, rapporté à N, tend vers une limite f_0.
2. Mieux : il existe C tq pour tout N, le nombre de 0 parmi les N premières lettres de w appartient à $[Nf_0 - C; Nf_0 + C]$.

Géométriquement, la "ligne brisée" constituée des points $P_N := \sum_{n=0}^{N} e_{w[n]}$, où (e_0, e_1) est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, reste à distance bornée de sa direction moyenne.

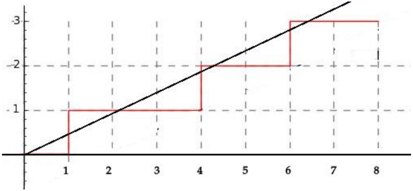


Figure: La ligne brisée de 01000100100...

⟶ Les mots sturmiens approximent les droites de pentes irrationnelles.

[dim 2] Les mots d'Arnoux-Rauzy [1991]

L'algorithme d'Arnoux-Rauzy :

$$F_{AR}: \quad (x,y,z) \mapsto \begin{cases} (x-y-z,y,z) & \text{si } x \geq y+z, \\ (x,y-x-z,z) & \text{si } y \geq x+z, \\ (x,y,z-x-y) & \text{si } z \geq x+y. \end{cases}$$

Cet algorithme engendre une classe de mots ternaires **[les mots d'Arnoux-Rauzy]** qui est, du point de vue combinatoire, la généralisation des mots sturmiens.

Ex : $w_{Trib} = 1213121121312121312112131213 12\ldots$ [mot de "Tribonacci"]

En particulier, chaque mot d'AR admet un vecteur fréquence des lettres (f_1, f_2, f_3).

$\longrightarrow$ Que peut-on dire de leurs lignes brisées 3D?

[dim 2] Les mots d'Arnoux-Rauzy [1991]

Fractal de Rauzy = adhérence de la projection de la ligne brisée d'un mot infini, parallèlement à son vecteur fréquence.

Figure: Fractal de Rauzy de w_{trib}

[dim 2] Les mots d'Arnoux-Rauzy [1991]

Vieille croyance : "la ligne brisée de tout mot d'AR reste à distance bornée de sa direction moyenne ; autrement-dit, son fractal de Rauzy est borné."

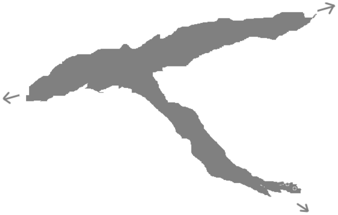
$\longrightarrow$ contredite en 2000 par Cassaigne, Ferenczi and Zamboni.

Aujourd'hui, on ne sait presque rien des propriétés topologiques et géométriques de ces fractals non bornés.

[dim 2] Les mots d'Arnoux-Rauzy [1991]

"Conjecture" : La ligne brisée de tout mot d'AR reste à distance bornée d'un plan contenant sa direction moyenne ; autrement-dit, son fractal de Rauzy est contenu dans une bande du plan.

"possible"

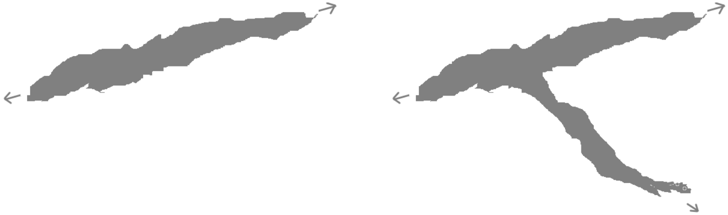


"impossible"

$\longrightarrow$ Intuition suggérée par le théorème d'Oseledets. En effet, si les exposants de Lyapounov du produit infini de matrices associé à w existent, l'un de ces exposants au moins est <0, puisque qu'il y en a déjà un >0, et que leur somme doit être égale à 0.

[dim 2] Les mots d'Arnoux-Rauzy [1991]

"Conjecture" : La ligne brisée de tout mot d'AR reste à distance bornée d'un plan contenant sa direction moyenne ; autrement-dit, son fractal de Rauzy est contenu dans une bande du plan.



"possible" "impossible"

$\longrightarrow$ Intuition suggérée par le théorème d'Oseledets. En effet, si les exposants de Lyapounov du produit infini de matrices associé à w existent, l'un de ces exposants au moins est <0, puisque qu'il y en a déjà un >0, et que leur somme doit être égale à 0.

Cette conjecture est fausse.

Théorème [A. 20]

Il existe un mot d'Arnoux-Rauzy dont le fractal de Rauzy n'est contenu dans aucune bande du plan.

III - Méthodes

Méthodes

- Réduire le problème de systèmes dynamiques à une question combinatoire.
- Aborder le problème combinatoire à l'aide d'outils d'informatique théorique (ex: exploration d'un graphe)
- Développer une intuition par l'expérimentation (par ex. avec Python/Sage).

Merci !