ECOLE CENTRALE MARSEILLE
Mathématiques Financières TP1
Formule de Black–Scholes – Monte Carlo, Réduction de variance

É. Pardoux

6 novembre 2016

Dans les applications à la finance on est amené à calculer des quantités du type :

$$C = \mathbb{E}\left(\left(e^{\sigma Z} - K\right)_+\right), \tag{1}$$

Z étant une gaussienne centrée réduite et $x_+ = \max(x, 0)$. Cette quantité représente le prix d'une option d'achat (en Anglais *call*). Evidemment, dans le cas précis cité on a une "formule explicite" (c'est la célèbre formule de Black et Scholes) :

$$C = e^{\sigma^2/2} N\left(\sigma - \frac{\log(K)}{\sigma}\right) - KN\left(-\frac{\log(K)}{\sigma}\right), \tag{2}$$

avec

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du.$$

Mais nous allons supposer ici que l'on cherche à calculer ces quantités par Monte Carlo, ce qui est la seule voie praticable dans le cas à peine plus compliqué d'une option panier.

Considérons la formule pour le prix d'une option de vente (en Anglais *put*) sur le même sous–jacent, avec la même échéance et le même prix d'exercice, c'est à dire

$$P = \mathbb{E}\left(\left(K - e^{\sigma Z}\right)_+\right). \tag{3}$$

On déduit de l'identité $x = x^+ - (-x)^+$ la formule de parité call–put

$$C - P = \mathbb{E}e^{\sigma Z} - K,$$

où l'espérance $\mathbb{E}e^{\sigma Z}$ se calcule explicitement, et vaut $\exp(\sigma^2/2)$, d'où une méthode de variable de contrôle, dont il est clair (pourquoi ?) qu'elle réduit la variance.

Par ailleurs, puisque Z et $-Z$ ont la même loi, on peut appliquer au calcul par Monte Carlo de (1) et aussi de (3) la méthode de réduction de variance par variable antithétique.

Enfin, dans le cas particulier que l'on va choisir ci–dessous $K = 1$, on peut appliquer tant à (1) qu'à (3) une méthode d'échantillonage préférentiel en écrivant (nous détaillons la formule dans le cas du call)

$$\begin{aligned}
C &= \mathbb{E}\left(\left(e^{\sigma Z} - 1\right)_+\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{(e^{\sigma x} - 1)_+}{|x|} |x| e^{-x^2/2} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{(e^{\sigma\sqrt{x}} - 1)_+ + (e^{-\sigma\sqrt{x}} - 1)_+}{\sqrt{x}} \, \frac{e^{-x/2}}{2} dx \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{(e^{\sigma\sqrt{Y}} - 1)_+ + (e^{-\sigma\sqrt{Y}} - 1)_+}{\sqrt{2\pi Y}}\right),
\end{aligned}$$

où Y suit une loi exponentielle de paramètre $1/2$.

Dans l'expérimentation numérique on choisira $\sigma = 1.5$ ainsi que $K = 1$. On fera tous les calculs de Monte Carlo avec des tailles d'échantillon $N=$ 1 000, 10 000 et 100 000. Pour chaque résultat, on donnera l'estimateur de Monte Carlo, et un intervalle de confiance à 95 %, basé sur le TCL et une estimation de la variance.

— 1 Calculer la valeur donnée par la formule de Black–Scholes (2).

— 2 Calculer la valeur de C par Monte Carlo, en utilisant la formule (1), puis en utilisant la formule de parité call–put et (3) pour le calcul de P par Monte carlo.

— 3 Effectuer les deux mêmes calculs, en utilisant une méthode de variable antithétique.

— 4 Effectuer les deux mêmes calculs, en utilisant une méthode d'échantillonage préférentiel.