

ESPACES VECTORIELS

Exercice 2.

- (1) E_1 est un espace vectoriel.
- (2) E_2 n'est pas un espace vectoriel car la fonction $0 \notin E_2$
- (3) E_3 n'est pas un espace vectoriel car $f = -1 \in E_3$ et $-1 \times f \notin E_3$.
- (4) E_4 n'est pas un espace vectoriel car $f(x) = x^3 - \arctan(x)$ n'est pas dans E_4 alors que x^3 et $\arctan$ le sont.
- (5) E_5 est un espace vectoriel car
 - 0 est solution de l'équation différentielle.
 - Si f et g sont deux solutions et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\lambda f + g)' + (x^2 + 1)(\lambda f + g) = \lambda(f' + (x^2 + 1)f) + (g' + (x^2 + 1)g) = \lambda 0 + 0 = 0$$

Exercice 3.

- (1) G_1 n'est pas un espace vectoriel car $0 \notin G_1$.
- (2) G_2 est un espace vectoriel car
 - Si $P = 0$ alors $P(0) = 0 = 2 \times 0 = 2P(1)$ donc $0 \in G_2$.
 - Si $P, Q \in G_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $(\lambda P + Q)(0) = \lambda P(0) + Q(0) = \lambda(2P(1)) + 2Q(1) = 2(\lambda P(1) + Q(1))$.
- (3) G_3 n'est pas un espace vectoriel car $X^2 + (X - X^2)$ n'est pas de degré pair.
- (4) G_4 est un espace vectoriel car $0 \in G_4$ et $(\lambda P + Q)''(2) = \lambda P''(2) + Q''(2)$.

Exercice 7.

- (1) Soient $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tels que $a_0 P_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2 = 0$. On regarde les valeurs en 0, 1 et 2.
 - $(a_0 P_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2)(0) = a_0 = 0$
 - $(a_0 P_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2)(1) = a_2 = 0$
 - $(a_0 P_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2)(2) = a_1 = 0$
- (2) La famille $\{P_0, P_1\}$ est libre donc $\dim F = 2$. De même la famille $\{P_2, P_3\}$ est libre donc $\dim G = 2$.
 On a $F + G = \text{Vect}(P_0, P_1, P_2, P_3)$ et la famille $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$ donc $\dim(F + G) = 3$.
 En utilisant la formule $\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G) = 1$.

Exercice 9.

- (1) Soient a, b tels que $a \sin + b \cos = 0$ Alors en regardant les valeurs en 0 et $\pi/2$ on obtient $a = 0$ et $b = 0$ respectivement. La famille est libre
- (2) Soient $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $g = \lambda_1 f_{a_1} + \dots + \lambda_n f_{a_n} = 0$. On peut supposer que $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.
 Il est clair que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g}{x^{a_n}} = \lambda_n$ et comme $\frac{g}{x^{a_n}} = 0$ on obtient $\lambda_n = 0$.
 On continue par induction sur le terme de plus haut degré. La famille est libre
- (3) Soient $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $h = \lambda_1 f_{a_1} + \dots + \lambda_n f_{a_n} = 0$. Il est clair que h est dérivable sur $\mathbb{R}$. D'autre part, en calculant la dérivée à droite

et à gauche de h en a_i , notée $h'_g(a_i)$ et $h'_d(a_i)$ on obtient que $h'_d(a_i) - h'_g(a_i) = 2\lambda_i$. Comme pour être dérivable, il faut que les deux dérivées soient égales, on obtient $\lambda_i = 0$. La famille est libre

Exercice 15.

- Soit $f \in \mathcal{I} \cap \mathcal{P}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on obtient $f(-x) = f(x)$ car $f \in \mathcal{P}$, et $f(x) = -f(-x)$ car $f \in \mathcal{I}$. On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$. Donc $f = 0$. On en déduit que $\mathcal{I} \cap \mathcal{P} = \{0\}$
- Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On pose $f_p = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $f_i = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$. Il est facile de vérifier que $f_p \in \mathcal{P}$ et $f_i \in \mathcal{I}$, et de plus $f_i + f_p = f$. Donc $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{I} + \mathcal{P}$

En conclusion $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{I} \oplus \mathcal{P}$

Exercice 16.

- (1) Si $x \neq 0$, la famille $(x, f(x))$ est liée. Donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda x + \mu f(x) = 0$ avec $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. On ne peut pas avoir $\mu = 0$ sinon on aurait $\lambda x = 0$ avec $\lambda \neq 0$. Donc on peut diviser par μ et obtenir $f(x) = -\frac{\lambda}{\mu}x$.
- (2) Soient x, y une famille libre. En particulier $x \neq 0, y \neq 0$ et $z = x + y \neq 0$. On en déduit :

$$\lambda_x x + \lambda_y y = f(x + y) = \lambda_f(z) = \lambda_z z = \lambda_z(x + y) = \lambda_z x + \lambda_z y$$

Comme la famille (x, y) est une base du sous-espace vectoriel qu'elle engendre, on en déduit que l'écriture dans la base (x, y) est unique et donc $\lambda_x = \lambda_z$ et $\lambda_y = \lambda_z$. Il vient donc $\lambda_x = \lambda_y$.

- (3) Soit $\{e_i\}_{i \in I}$ une base de E . En raisonnant par induction à partir de la question précédente, on en déduit que tous les λ_{e_i} sont égaux à λ . Soit $x \in E$. On a

$$f(x) = f(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n) = x_1 \lambda e_1 + \cdots + x_n \lambda e_n = \lambda x$$

On en déduit que f est une homothétie.

Exercice 17.

- (1) On considère la restriction $f|_H$ de f au sous-espace vectoriel H . On a donc $f|_H : H \rightarrow F$ une application linéaire. $\text{Im}(f|_H) = f(H)$. Et $\text{Ker}(f|_H) = H \cap \text{Ker}(f)$. On applique alors le théorème du rang à cette application. $\dim H = \dim f(H) + \dim(H \cap \text{Ker}(f))$
- (2) On applique le même principe que la question précédente avec $H = f^{-1}(K)$. Il suffit de voir que dans ce cas $\text{Ker}(f) \subset f^{-1}(K)$ puisque $0 \in K$.

Exercice 18.

Le principe est le même qu'à l'exercice 15.

Soit $f \in G \cap H$. Alors on a $\forall x \in [0, 1], f \circ \sigma(x) = f(x) = -f \circ \sigma(x)$ donc $f = 0$.

Et en posant $f_G = \frac{1}{2}(f + f \circ \sigma)$ et $f_H = \frac{1}{2}(f - f \circ \sigma)$ on obtient $f = f_G + f_H$ avec $f_G \in G$ et $f_H \in H$.

Exercice 19.

- (1) On montre que $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$. En effet si $y \in \text{Im}(f + g)$ alors $\exists x \in E, f(x) + g(x) = y$. Donc $y \in \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$.

On a donc

$$\dim(\text{Im}(f + g)) \leq \dim(\text{Im}(f) + \text{Im}(g)) \leq \dim \text{Im}(f) + \dim \text{Im}(g)$$

- (2) On a égalité entre $\text{rg}(f + g)$ et $\text{rg}(f) + \text{rg}(g)$ si et seulement si il y a égalité dans les deux inégalités précédentes.

Tout d'abord, on considère $\dim \text{Im}(f) + \dim \text{Im}(g) = \dim(\text{Im}(f) + \text{Im}(g)) = \dim \text{Im}(f) + \dim \text{Im}(g) - \dim(\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g))$. On a donc $\dim(\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g)) = 0$ si et seulement si $\boxed{\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}}$.

D'autre part. $\dim(\text{Im}(f + g)) = \dim(\text{Im}(f) + \text{Im}(g))$. On en déduit que $\text{Im}(f + g) = \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$. Soit alors $x \in E$. Comme $f(x) \in \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$, il existe un $x' \in E$ tel que $f(x) = (f + g)(x') = f(x') + g(x')$. On a donc que $f(x - x') = g(x') = y$. Donc $y \in \text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$. On obtient donc $x - x' \in \text{Ker}(f)$, $x' \in \text{Ker}(g)$ et $x = (x - x') + x'$. Donc $\boxed{E = \text{Ker } f + \text{Ker } g}$.

Exercice 21.

- (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
- (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
- (3) $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

Exercice 23. (1) On obtient la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- (2) Si A est inversible et $AB = 0$. Alors on a $B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}0 = 0$.