Université de Sherbrooke
Faculté des sciences, Département de mathématiques

MAT 638 : Calcul Variationnel
Professeur: Frédéric Palesi

Examen intra
Mardi 15 février 2011, 10h30-12h20

Instructions

- Aucun document n'est autorisé.
- Les réponses doivent être justifiées et il sera tenu compte dans la correction de la rédaction et de la présentation des preuves.
- Les questions marquées **(***)** sont plus difficiles que les autres et sont hors-barême. N'hésitez pas à admettre le résultat et à passer aux questions suivantes (si il y en a).
- Cet examen est sur 50 points.

I– Fonctions de plusieurs variables [9 points]

Les deux parties sont complètement indépendantes.

I.A. **Différentiabilité.** Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(1) La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

Correction. On étudie la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{xy^2+x^2y}{x^2+y^2} - 0 \right|$$

On a d'une part $|xy^2+x^2y| \leq |xy^2|+|x^2y| \leq 2\,\|(x,y)\|_\infty^3$ et d'autre part $|x^2+y^2| \geq \|(x,y)\|_\infty^2$. Ce qui nous donne

$$\left| \frac{xy^2+x^2y}{x^2+y^2} - 0 \right| \leq 2\,\|(x,y)\|_\infty$$

On en déduit que la limite de $f(x,y)$ quand (x,y) tend vers 0 est $f(0,0)=0$. La fonction est donc continue en $(0,0)$. □

(2) Determiner si les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent et les calculer le cas échéant.

Correction. Attention, il faut revenir à la définition de dérivée partielle en un point puisque la fonction au point $(0,0)$ n'est pas définie de la même façon que sur le reste du domaine.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{(0+t)0^2+(0+t)^20}{(0+t)^2+0^2} - 0}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0 \end{aligned}$$

La dérivée partielle par rapport à x en $(0,0)$ existe et est égale à 0.

La fonction est symétrique en x et y, donc la dérivée partielle par rapport à y existe en 0 et est égale à 0. □

(3) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Correction. Ici on doit calculer la dérivée partielle sur le reste du domaine et vérifier si elle est continue ou non en $(0,0)$ qui est le seul point qui peut poser des problèmes.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(y^2+2xy)(x^2+y^2)-(xy^2+x^2y)(2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

On remarque que sur la droite $y = x$, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \frac{2x^4}{4x^4} = \frac{1}{2}$$

On en déduit que la dérivée partielle par rapport à x n'est pas continue en $(0,0)$ donc la fonction n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. □

I.B. **Extremums.** Soit la fonction

$$f(x,y) = x^2y - 2x^2 + 2y^2 - 4xy + 8x - 8y - 2$$

Déterminer tous les extremums locaux de f en déterminant si ce sont des maximums ou des minimums locaux.

Correction. On détermine d'abord les points critiques de la fonction. Soit (x,y) tel que

$$\begin{aligned}
&\bigtriangledown f(x,y) = (2xy-4x-4y+8, x^2-4x+4y-8) = (0,0) \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} y = 2+x-\frac{x^2}{4} \\ 2x(2+x-\frac{x^2}{4}) - 4x - 4(2+x-\frac{x^2}{4}) + 8 = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} y = 2+x-\frac{x^2}{4} \\ x(x^2-6x+8) = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = 4 \\ y = 2+x-\frac{x^2}{4} \end{cases}
\end{aligned}$$

Les points critiques sont donc $(0,2)$, $(2,3)$ et $(4,2)$.

Calculons maintenant la matrice hessienne de f pour déterminer si ce sont des minimums ou des maximums.

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2(y-2) & 2(x-2) \\ 2(x-2) & 4 \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\det(Hf(0,2)) = -16, \qquad \det(Hf(4,2)) = -16, \qquad \det(Hf(2,3)) = 8$$

Les points $(0,2)$ et $(4,2)$ ne sont pas des extremums. Et en $(2,3)$ le terme $2(y-2) = 2 > 0$ donc le point $(2,3)$ est un minimum local, et c'est le seul extrema de la fonction. □

II– Géodésiques du demi-plan de Poincaré [9 points]

On considère ici la fonctionnelle suivante définie pour $y \in \mathcal{C}^1([a,b])$ ne s'annulant pas.

$$J[y] = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$$

(1) Donner une intégrale première pour l'équation d'Euler-Lagrange.

Correction. La fonction $F(x,y,y') = \dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{y}$ ne dépend pas de x. On sait qu'une intégrale première de l'équation d'Euler-Lagrange est donnée par :

$$\begin{aligned} H(y,y') &= y'\frac{\partial F}{\partial y'} - F = y'\frac{y'}{y\sqrt{1+y'^2}} - \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} \\ &= \frac{-1}{y\sqrt{1+y'^2}} \end{aligned}$$

□

(2) Donner la forme générale des points stationnaires de la fonctionnelle J.

Correction. Soit y une extrémale de J. Il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$\frac{1}{y\sqrt{1+y'^2}} = c$$

On en déduit que $c \neq 0$ et on pose $C = \frac{1}{c}$ de sorte que

$$y\sqrt{1+y'^2} = C$$

On en déduit que $C > y(x)$ pour tout $x \in [a,b]$. En posant $y' = \frac{dy}{dx}$ on sépare les variables pour obtenir

$$dx = \frac{y}{\sqrt{C^2-y^2}}dy$$

Cette fonction s'intègre directement (pas besoin de faire de changements de variables compliqués). Il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que

$$x = -\sqrt{C^2-y^2} + k$$

En exprimant y en fonction de x on obtient que les extrémales de J sont de la forme :

$$y(x) = \sqrt{C^2-(x-k)^2}, \qquad C,k \in \mathbb{R}$$

□

(3) En déduire que la seule courbe joignant les points (a,A) et (b,B) (avec $A>0$ et $B>0$) qui soit un point stationnaire de J, est un arc de cercle dont on déterminera le centre.

Correction. On voit que pour toute extrémale y de J on a

$$(x-k)^2 + y^2 = C^2$$

qui est l'équation d'un cercle centré en $(k,0)$ et de rayon C. On veut déterminer k, pour cela on écrit

$$\left(\begin{array}{l} (a-k)^2 + A^2 = C^2 \\ (b-k)^2 + B^2 = C^2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow k = \frac{A^2-B^2}{b-a} + (a+b)$$

□

III– Seconde Variation [12 points]

Soit J une fonctionnelle définie sur $(E, \|\|)$ continue et admettant une variation de Gateaux.
Pour $y \in E$ et $h \in E$, on définit la fonction d'une variable

$$W_{y,h} : t \longmapsto J[y+th]$$

On supposera dans tout ce problème J est une fonctionnelle telle que pour tout $y, h \in E$, la fonction $W_{y,h}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

(1) Ecrire la première variation $\delta J_y[h]$ en fonction de $W_{y,h}$.

Correction.

$$\delta J_y[h] = \lim_{t\to 0} \frac{J[y+th]-J[y]}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{W_{y,h}(t)-W_{y,h}(0)}{t} = W'_{y,h}(0)$$

□

(2) Ecrire le développement de Taylor à l'ordre 2 en $t=0$ de la fonction $W_{y,h}(t)$.

Correction. La fonction $W_{y,h}$ est une fonction comme une autre ....

$$W_{y,h}(t) = W_{y,h}(0) + tW'_{y,h}(0) + \frac{t^2}{2} W''_{y,h}(0) + \mathbf{o}(t^2)$$

□

(3) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$W''_{y,\lambda h}(0) = \lambda^2 W''_{y,h}(0)$$

Correction. Là encore, ce n'était pas très compliqué. Il suffit de remarquer $W_{y,\lambda h}(t) = W_{y,h}(\lambda t)$.

Il ne reste plus qu'à dériver la fonction $g(t) = W_{y,h}(\lambda t)$, de façon classique:

$$g'(t) = \lambda W'_{y,h}(\lambda t)$$
$$g''(t) = \lambda(\lambda W''_{y,h}(\lambda t))$$

Donc en $t=0$ on a bien le résultat voulu. □

(4) Soit $y \in E$. Montrer que pour tout $h \in E$

$$J[y+h] - J[y] = \delta J_y[h] + \frac{1}{2} W''_{y,h}(0) + \varepsilon_2(h)$$

avec ε_2 qui satisfait la condition :

$$\forall h \in E, \qquad \lim_{t\to 0} \frac{\varepsilon_2(th)}{t^2} = 0$$

Correction. Soit $y \in E$. Pour tout $h \in E$, on définit la fonction :

$$\varepsilon_2(h) = J[y+h] - J[y] - \delta J_y[h] - \frac{1}{2} W''_{y,h}(0)$$

La seule et unique chose à vérifier est la propriété de ε_2. Soit $h \in E$ et $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon_2(th)}{t^2} &= \frac{1}{t^2}\left(J[y+th] - J[y] - \delta J_y[th] - \frac{1}{2} W''_{y,t^2h}(0)\right) \\
&= \frac{1}{t^2}\left(W_{y,h}(t) - W_{y,h}(0) - tW'_{y,h}(0) - \frac{t^2}{2} W''_{y,h}(0)\right) \\
&= \frac{1}{t^2}\left(\mathbf{o}(t^2)\right)
\end{aligned}$$

Et par définition de $\mathbf{o}(t^2)$, on a :

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2}\left(\mathbf{o}(t^2)\right) = 0$$

La fonction $\varepsilon_2(h)$ satisfait bien la propriété demandée. □

On notera $W''_{y,h}(0) = \delta^2 J_y[h]$ et on l'appelle la *seconde variation* de J en y

(5) Exemple : soit la fonctionnelle $K[y] = (y(c))^3$ avec $c \in [a,b]$. Montrer que

$$\delta^2 K_y[h] = 6y(c)(h(c))^2$$

Correction. Soit $y, h \in E$. On a

$$\begin{aligned} W_{y,h}(t) &= ((y+th)(c))^3 = (h(c)t + y(c))^3 \\ W'_{y,h}(t) &= 3h(c)(h(c)t + y(c))^2 \\ W''_{y,h}(t) &= 6h(c)^2(h(c)t + y(c)) \\ W''_{y,h}(0) &= 6h(c)^2 y(c) \end{aligned}$$

□

(6) Montrer que si J admet un maximum local en y alors il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $h \in E$ et $\|h\| < \alpha$ on a :

$$\delta^2 J_y[h] \leq 0$$

Correction. Supposons que J admet un maximum local en y, alors pour tout $h \in E, \delta J_y[h] = 0$. D'autre part, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall \|h\| < \alpha_1, J[y+h] - J[y] \leq 0$$

Soit alors $h \in E$ tel que $\|h\| < \alpha_1$, on a

$$\delta^2 J_y[h] + \varepsilon_2[h] \leq 0$$

Pour $|t| < 1$ on a $\|th\| < \|h\| \leq \alpha_1$ donc

$$\begin{aligned} &\delta^2 J_y[th] + \varepsilon_2[th] \leq 0 \\ \Leftrightarrow &\frac{1}{t^2}(\delta^2 J_y[th] + \varepsilon_2[th]) \leq 0 \\ \Leftrightarrow &\delta^2 J_y[h] + \frac{\varepsilon_2[th]}{t^2} \leq 0 \end{aligned}$$

En passant à la limite quand $t \to 0$ on en déduit que $\delta^2 J_y[h] \leq 0$. □

(7) **(***)** Montrer que la seconde variation d'une fonctionnelle de la forme

$$J = \int_a^b F(x, y, y')dx$$

avec F de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$ est

$$\delta^2 J_y[h] = \int_a^b \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} hh' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} h'^2 \right) dx$$

Correction. Soit $y, h \in E$ et $t \in \mathbb{R}$. On rappelle le développement de Taylor à l'ordre 2 d'une fonction $f(z)$

$$f(z+tk) = f(z) + df_z(tk) + \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tk_i)(tk_j) + \mathbf{o}(\|tk\|^2)$$

En remplaçant $z = (x, y(x), y'(x))$ et $k = (0, h(x), h'(x))$. On en déduit

$$F(z(x)+tk(x)) = F(x,y,y') + tdF_{z(x)}(k(x)) + t^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} h(x)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} h(x)h'(x) + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} h'(x)^2 \right) + \mathbf{o}(\|tk\|^2)$$

En remplaçant dans l'expression de J on obtient :

$$W_{y,h}(t) = J[y+th] = \int_a^b F(z(x) + tk(x))dx$$

On peut en déduire que la dérivée seconde

$$W''_{y,h}(0) = \int_a^b \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} hh' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} h'^2 \right) dx$$

$\square$

IV– Cas dégénéré de l'équation d'Euler-Lagrange [20 points]

Les trois parties sont relativement indépendantes.

IV.A. **Exemples.**

(1) Soit la fonctionnelle

$$J[y] = \int_0^1 \left(x^2y' + \cos(y)\right) dx$$

Montrer que J n'a pas d'extremum relatif sur $\mathcal{S} = \left\{y \in \mathcal{C}^1([0,1]) | y(0) = 0; y(1) = 1\right\}$.

Correction. Soit y un extremum relatif de J. Alors y satisfait l'équation d'Euler-Lagrange :

$$-\sin(y) - 2x = 0$$

Cette équation ne peut pas avoir de solution pour tout $x \in [0,1]$ puisque pour $x > \frac{1}{2}$ on aurait $|\sin y| > 1$ ce qui est impossible.

Donc J n'a pas d'extremums relatifs. $\square$

(2) Soit la fonctionnelle

$$J[y] = \int_a^b \left((x^2 + 3y^2)y' + 2xy\right) dx$$

et $\mathcal{S} = \left\{y \in \mathcal{C}^1([a,b]) | y(a) = A; y(b) = B\right\}$.

(a) Montrer que toute fonction de $\mathcal{S}$ est un point stationnaire de J.

Correction. On a les fonctions suivantes

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 6yy' + 2x, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = x^2 + 3y^2, \qquad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 2x + 6yy'$$

On en déduit que l'équation d'Euler-Lagrange :

$$6yy' + 2x - (2x + 6yy') = 0$$

est toujours vérifiée pout toute fonction $y \in \mathcal{S}$. Donc toute fonction y est un point stationnaire de J. $\square$

(b) Montrer qu'il existe $\phi(x,y) \in \mathcal{C}^1$ telle que pour tout $y \in \mathcal{S}$:

$$\frac{d}{dx}\left(\phi(x, y(x))\right) = (x^2 + 3y(x)^2)y'(x) + 2xy(x).$$

Correction. Pour trouver la fonction ϕ on écrit :

$$\frac{d}{dx}\left(\phi(x, y(x))\right) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + y'(x)\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

Par identification on a $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy$ donc

$$\phi(x,y) = x^2y + \psi(y)$$

On a donc

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 + \psi'(y)$$

On en déduit que $\psi'(y) = 3y^2$ donc $\psi(y) = y^3$.
La fonction $\phi(x,y) = x^2y + y^3$ satisfait bien la condition de l'énoncé. $\square$

(c) En déduire que J est constante sur $\mathcal{S}$.

Correction. Soit $y \in \mathcal{S}$, posons $R(x) = \phi(x, y(x))$ ou ϕ est la fonction trouvée à la question précédente. On a immédiatement

$$F(x, y(x), y'(x)) = R'(x)$$

On en déduit

$$J[y] = \int_a^b R'(x)dx = R(b) - R(a) = (y(b)^3 + b^2 y(b)) - (y(a)^3 + a^2 y(a)) = B(B^2 + b^2) - A(A^2 + b^2)$$

Cette valeur est la même pour tout $y \in \mathcal{S}$.
La fonctionnelle est constante sur $\mathcal{S}$.

□

IV.B. **Cas où l'équation est triviale.**

(1) Exprimer l'équation d'Euler-Lagrange pour une fonctionnelle de la forme

$$J[y] = \int_a^b \big(\Lambda(x, y)y' + M(x, y)\big)\, dx$$

où Λ et M sont des fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Correction. On a les fonctions suivantes

$$\frac{\partial F}{\partial y} = y' \frac{\partial \Lambda}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial y}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = \Lambda(x, y), \qquad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial \Lambda}{\partial x} + y' \frac{\partial \Lambda}{\partial y}$$

L'équation d'Euler-Lagrange est donc :

$$y' \frac{\partial \Lambda}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial y} - \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x} + y' \frac{\partial \Lambda}{\partial y} \right) = 0$$

C'est-à-dire

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x} = 0$$

□

(2) **(***)** Supposons que Λ et M sont telles que

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

Montrer que la fonction

$$\phi(x, y) = \int_0^1 (xM(tx, ty) + y\Lambda(tx, ty))dt$$

est telle que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = M \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \Lambda$$

Correction.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x} &= \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\int_a^b \left(((x+\tau)M(t(x+\tau),ty)+y\Lambda(t(x+tau),ty))-(xM(tx,ty)+y\Lambda(tx,ty))\right)dt \\
&= \int_0^1 \lim_{\tau\to 0}\left(M(t(x+\tau),ty)+x\frac{M(tx+\tau t,ty)-M(tx,ty)}{\tau}+y\frac{\Lambda(tx+\tau t,ty)-\Lambda(tx,ty)}{\tau}\right)dt \\
&= \int_0^1 M(tx,ty)+x\frac{\partial M}{\partial x}(tx,ty)t+y\frac{\partial \Lambda}{\partial x}(tx,ty)tdt \\
&= \int_0^1 M(tx,ty)+t\left(x\frac{\partial M}{\partial x}(tx,ty)+y\frac{\partial M}{\partial y}(tx,ty)\right)dt \\
&= \int_0^1 M(tx,ty)+t\frac{d}{dt}\left(M(tx,ty)\right)dt \\
&= \int_0^1 M(tx,ty)dt+[tM(tx,ty)]_0^1-\int_0^1 M(tx,ty)dt \\
&= M(x,y)
\end{aligned}$$

La démonstration est la même pour $\dfrac{\partial \phi}{\partial y}$ par symétrie. □

(3) En supposant l'hypothèse de la question précédente vérifiée, montrer que la fonctionnelle J est constante.

Correction. Soit ϕ la fonction définie à la question précédente et $y(x)\in\mathcal{S}$. On a l'identité

$$\Lambda(x,y)y'+M(x,y)=\frac{\partial\phi}{\partial y}y'+\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{d}{dx}(\phi(x,y(x)))$$

On en déduit que pour tout $y\in\mathcal{S}$

$$J[y]=\int_a^b\left(\frac{d}{dx}(\phi(x,y(x)))\right)dx=[\phi(b,B)-\phi(a,A)]$$

La fonction ϕ ne dépend pas de y, on en déduit que la fonctionnelle J est constante pour tout $y\in\mathcal{S}$. □

IV.C. **Réciproque.** Soit une fonctionnelle de la forme

$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx$$

avec F de classe $\mathcal{C}^2$ (deux fois dérivable).

(1) **(***)** Soit $A(x,y,y')$ et $B(x,y,y')$ deux fonctions $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^3$. Si pour tout $y\in\mathcal{C}^2([a,b])$ et tout $x\in\mathbb{R}$ on a

$$A(x,y(x),y'(x))+B(x,y(x),y'(x))y''(x)=0$$

Alors $B(x,y,y')=0$

Correction. On raisonne par l'absurde et on suppose que $B(z)\neq 0$ pour un certain élément $z=(z_1,z_2,z_3)\in\mathbb{R}^3$. Par continuité, il existe un ouvert U autour de z tel que $|B(z)|>M>0$.

L'idée ici est de trouver un point $c\in[a,b]$ et suite de fonction telle que :

- $(c,y_n(c),y_n'(c))\in U$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
- $|y_n''(c)|$ tend vers l'infini

Par exemple, on peut considérer $c=z_1$ et

$$y_n(x)=\frac{1}{n\sqrt{n}}\sin(n(x-c))+z_3(x-c)+z_2$$

Ainsi la suite $A(c, y_n(c), y_n'(c))$ est bornée par continuité de A. On a $B(c, y_n(c), y_n'(c)) \geq M > 0$ par construction. On en déduit que

$$\lim_{n \to 0} A(c, y_n(c), y_n'(c)) + B(c, y_n(c), y_n'(c)) y_n''(c) = \infty$$

Contradiction ... $\square$

(2) En déduire que si tout $y \in \mathcal{S}$ satisfait l'équation d'Euler-Lagrange (autrement dit l'équation d'Euler-Lagrange se réduit en $0 = 0$), alors on peut écrire F sous la forme

$$F(x, y, y') = \Lambda(x, y) y' + M(x, y)$$

C'est à dire que la fonction F est linéaire en y'.

Correction. Ici, il suffit de réécrire l'équation d'Euler-Lagrange de façon développée. En effet

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y''$$

L'équation d'Euler Lagrange devient donc :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y'\right) - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right) y'' = 0$$

Si l'équation d'Euler-Lagrange est satisfaite pour toute fonction y alors d'après la question précédente, on doit avoir

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right) = 0$$

On en déduit que $F(x, y, y')$ est une fonction linéaire en y'. Donc il existe $\Lambda(x, y)$ et $M(x, y)$ telles que

$$F(x, y, y') = \Lambda(x, y) y' + M(x, y)$$

$\square$