SURFACES HYPERBOLIQUES

FREDERIC PALESI

Résumé. Notes du cours de Surfaces Hyperboliques donné à Aix-Marseille Université 2015-2016 dans le cadre du M2MF.

1 . Structure hyperbolique sur une surface

I . Rappels de topologie

On rappelle ici sans démonstration, des résultats essentiels sur la topologie des surfaces, l'homologie et les revêtements.

A . Classification des surfaces

Une *surface* est une variété (connexe) de dimension 2. C'est à dire un espace topologique (séparé) connexe dans lequel chaque point possède un voisinage homéomorphe à un ouvert du plan $\mathbb{R}^2$. La donnée d'un voisinage et d'un tel homéomorphisme est appelée une carte locale.

Plus généralement, une *surface à bord* est est un espace topologique séparé dans lequel chaque point possède un voisinage homéomorphe à un ouvert du demi-plan $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Un point envoyé sur la droite $\{0\} \times \mathbb{R}$ par une carte locale est appelé point de bord, et les autres points sont appelés points intérieurs.

Une surface *fermée* est une surface compacte et sans bord. On rappelle la classification des surfaces fermée :

Théorème 1 .1 Toute surface fermée est homéomorphe à un membre de l'une des trois familles :
– La sphère $\mathbb{S}^2$
– La somme connexe de g tores, $g \geq 1$.
– La somme connexe de k plans projectifs, $k \geq 1$.

Les deux premières familles constituent les surfaces orientables, et la dernière correspond aux surfaces non-orientables (la bouteille de Klein par exemple). Dans le reste de ce cours, les surfaces seront toujours considérées orientables (Par simplicité. La plupart des résultats énoncés dans ce cours s'appliquent au cas non-orientable). Le nombre de tores g est appelé le *genre* de la surface.

Une surface compacte (avec ou sans bord) est une surface fermée auquel on a enlevé un nombre fini de disques ouverts. Les surfaces compactes à bord sont classifiées (à homéomorphismes près) par le genre et le nombre de composantes de bord.

Nous considèrerons aussi les surfaces obtenues en retirant à une surface compacte à bord, un nombre fini de points intérieurs, que l'on appellera piqûres. Cela rend la surface non compacte, mais néanmoins de *type fini*.(La classification générale des surfaces non-compactes étant beaucoup plus compliquées). Dans le reste du cours, le mot *surface* désignera en général une telle surface orientable, dont le type d'homéomorphisme est donné par (g, b, p) où g est le genre, b le nombre de composantes de bord et p le nombre de piqûres.

Date: 21 mars 2016.

On utilisera souvent la caractéristique d'Euler d'une surface qui est $\chi(S) = 2 - 2g - b - n$.

B . Homotopie

On rappelle ici quelques notions de topologie algébrique indispensables pour la suite ;

Définition 1 .1 : Deux chemins α_0 et α_1 sont homotopes si $\alpha_0(0) = \alpha_1(0) = p$ et $\alpha_0(1) = \alpha_1(1) = q$ et il existe $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ continue telle que :

$$F(0,\cdot) = \alpha_0 \ , \ F(1,\cdot) = \alpha_1 \ , \ \forall s \in [0,1], F(s,0) = p, F(s,1) = q$$

En d'autres terme, on peut déformer continument le chemin α_0 en un chemin α_1 sans bouger les extrémités. Cela définit une relation d'équivalence sur les chemins

Définition 1 .2 : Un lacet est un chemin tel que $\alpha(0) = \alpha(1)$

Définition 1 .3 : Le groupe fondamental de X basé en $x \in X$, noté $\pi_1(X,x)$ est l'ensemble des classes d'homotopie de lacets basés en x. Deux groupes fondamentaux de X basés en deux points différents sont isomorphes, on notera donc $\pi_1(X)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité.

Le groupe fondamental d'une surface fermée orientable de genre g est donné par la présentation suivante :

$$\pi_1(S_g) = \langle a_1, b_1, \dots, b_g \mid \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] \rangle$$

Pour une surface non fermée avec b bords et p piqures, on a le groupe fondamental :

$$\pi_1(S_g) = \langle a_1, b_1, \dots, b_g, c_1, \dots c_b, d_1, \dots d_p \mid \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] \prod_{i=1}^{b} c_i \prod_{i=1}^{p} d_i \rangle$$

Dans ce cas le groupe fondamental est un groupe libre à $2g + n + b - 1$ générateurs. On peut remarquer que du point de vue du groupe fondamental, les composantes de bord et les piqures ne sont pas distinguables.

On dit que X est simplement connexe lorsque tout lacet est homotope à un point. Autrement dit $\pi_1(X,x) = \{*\}$.

Il est souvent intéressant de confondre un lacet avec son image, c'est à dire considérer un lacet comme une application $\alpha : \mathbb{S}^1 \to X$, sans préciser de point base. Dans ce cas on peut considérer la relation d'équivalence d'homotopie libre :

Définition 1 .4 : Deux lacets, α_0 et α_1 sont librement homotopes si il existe $H : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to X$ continue telle que $H(\cdot,0) = \alpha_0$ et $H(\cdot,1) = \alpha_1$.

Proposition 1 .1 Deux lacets basés en x sont librement homotopes si et seulement si ils sont conjugués dans $\pi_1(X,x)$.

Les classes d'équivalence d'homotopie libres correspondent aux classes de conjugaison dans $\pi_1(X)$.

C . Revêtement

Définition 1 .5 : Une application $f : Y \to X$ est un revêtement si f est surjective et si pour tout $x \in X$ il existe un voisinage U contenant x tel que $f^{-1}(U) = \sqcup_{i \in I} V_i$ où I est un ensemble discret et $f_{|v_i}$ est un homéomorphisme sur U.

Etant donné un espace X, le *revêtement universel* de X, noté $\widetilde{X}$ est un revêtement simplement connexe. Sous des hypothèses raisonnables (vérifiées lorsque X est une surface), un tel revêtement universel existe et est unique à homéomorphisme près. On peut le définir de la façon suivante :

Définition 1 .6 : Soit $x \in X$, l'ensemble suivant

$$\widetilde{X} = \{\alpha : [0,1] \to X, \alpha(0) = x\}/\text{homotopie}$$

est un revêtement simplement connexe au-dessus de X. L'application de revêtement est donnée par $\pi([\alpha]) = \alpha(1)$.
La fibre au dessus d'un point est isomorphe au groupe $\pi_1(X)$.

On peut montrer que le groupe fondamental $\pi_1(X)$ agit librement et proprement discontinument sur le revêtement universel $\widetilde{X}$.

On peut donner un exemple de revêtement universel dans le cadre hyperbolique. Soit Γ un groupe fuchsien, alors l'application de projection $\mathbb{H} \to \mathbb{H}/\Gamma$ est un revêtement. Comme $\mathbb{H}$ est simplement connexe, c'est le revêtement universel. Le groupe fondamental de $\mathbb{H}/\Gamma$ est isomorphe à $\pi_1(X)$.

On peut caractériser les revêtement par une propriété de relèvement des chemins :

Définition 1 .7 : On dit que l'application $f : Y \to X$ satisfait la propriété de relèvement des chemins si, pour tout chemin $\alpha : [0,1] \to X$ basé en x_0 et $y_0 \in f^{-1}(x_0)$, il existe un unique chemin $\overline{\alpha}$ basé en y_0 tel que $f \circ \overline{\alpha} = \alpha$.

Proposition 1 .2 Un revêtement satisfait la propriété de relèvement des chemins

Démonstration : On utilise le fait que localement autour d'un point du revêtement, on a un ouvert tel que l'application de revêtement restreinte à cet ouvert est un homéomorphisme. Cela nous donne l'unicité du chemin.

□

On a également la réciproque partielle :

Proposition 1 .3 soit $f : Y \to X$ un homéomorphisme local possédant la propriété de relèvement des chemins :
Alors f est un revêtement.

Démonstration : On considère le revêtement universel $\pi : \widetilde{X} \to X$ et on montre d'abord que π se relève en une application $\Pi : \widetilde{X} \to Y$. Alors on choisit des ouverts dans X qui se relèvent dans $\widetilde{X}$ et on les projète sur Y. Il suffit de montrer que ces ouverts sont bien disjoints en utilisant la propriété de relèvement des chemins.

□

II . Surface hyperbolique

A . Definition

On note $\mathbb{H}$ le plan hyperbolique et $G = \text{Isom}^+(\mathbb{H})$ le groupe des isométries directes du plan hyperbolique. On rappelle que G est isomorphe au groupe $\text{PSL}(2,\mathbb{R})$ qui agit sur le demi-plan supérieur par homographie.

Définition 1 .8 : Soit Σ une surface sans bord. Une structure géométrique sur Σ est la donnée d'une famille $\{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ où

(1) $\{U_i\}_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de Σ.

(2) Pour tout $i \in I$, $\phi_i : U_i \to \mathbb{H}$ est un difféomorphisme sur son image.

(3) Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, alors la restriction de $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ à chaque composante connexe de $\phi_j(U_i \cap U_j)$ est la restriction d'un élément de G.

L'ensemble $\{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ est appelé un atlas et chacune des paires (U_i, ϕ_i) est appelée une carte locale, comme précédemment.

Définition 1 .9 : Lorsque la surface a du bord, on remplace $\mathbb{H}$ par le demi-espace fermé $\mathbb{H}^+ = \{x + iy \in \mathbb{C}, y > 0, x \geq 0\}$. Les points de bord étant envoyé sur la géodésique $x = 0$. On parle dans ce cas de surface hyperbolique *à bord totalement géodésique.*

Remarque : La définition d'une structure hyperbolique sur Σ peut se généraliser à ce qu'on appelle les (X, G)-structures sur les variétés de dimension n. Avec X un espace et G un groupe de difféomorphismes de X dans X.

B . Métrique et géodésique

La structure hyperbolique munit Σ d'une métrique de chemin naturelle.

Soit $\gamma : [0,1] \to \Sigma$ un chemin dans Σ une surface munie d'une structure hyperbolique. On peut tout d'abord définir la longueur hyperbolique de γ comme suit :
On pose $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ une subdivision de l'intervalle $[0,1]$ de sorte que $c([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$ avec, (U_i, ϕ_i) est une carte locale de la structure hyperbolique. On définit alors :

$$l(\gamma) = \sum_{i=0}^{n} l(\phi_i \circ c_{|[t_i,t_{i+1}]})$$

(La longueur d'un chemin dans $\mathbb{H}$ est bien définie.) Il est clair que la longueur ne dépend pas de la subdivision de $[0,1]$ choisie (car les changements de cartes locales sont des isométries qui préservent les longueurs), ni de la parametrisation de γ (car les longueurs dans $\mathbb{H}$ ne dépendent pas de la paramétrisation)..

Cette longueur nous permet de définir une métrique sur Σ. Pour $x, y \in \Sigma$ on définit :

$$d(x,y) = \inf\{l(\gamma) \mid \gamma : [0,1] \to \Sigma, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\}$$

La métrique obtenue est une métrique dite Riemannienne (est issue d'un produit scalaire sur l'espace tangent). Pour une telle métrique, la courbure de Gauss est bien définie et est constante égale à -1. (localement, la courbure est la même que celle de l'espace hyperbolique)

En utilisant la formule de Gauss-Bonnet, on en déduit que si on peut mettre une structure hyperbolique sur Σ alors $\chi(\Sigma) < 0$.

Définition 1 .10 : Une *géodésique* est une courbe qui minimise localement la distance. Plus précisément Une courbe $\gamma : I \to \Sigma$ est un géodésique si il existe $k \geq 0$ telle que pour tout $t \in I$, il existe un voisinage J contenant t tel que pour tout $t_1, t_2 \in J$ on ait :

$$d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = k|t_1 - t_2|$$

On peut toujours reparamétrer une géodésique de sorte que $k = 1$. Dans ce cas, on peut considérer que les géodésiques sont des isométries locales de $\mathbb{R}$ vers Σ. On confondra la plupart du temps la courbe γ et son image.

Définition 1 .11 : On dit qu'un espace X est géodésiquement complet si tout géodésique $\gamma : I \to X$ peut se prolonger en une géodésique maximale $\gamma : \mathbb{R} \to X$.

Théorème 1 .2 (Hopf-Rinow)
Une surface hyperbolique (en fait n'importe quelle variété Riemanienne) est complète (pour la métrique) si et seulement si elle est géodésiquement complète.

Démonstration : Supposons que la surface hyperbolique X est complète. Soit $\gamma : [0, t) \to X$ une géodésique. On montre qu'on peut prolonger γ au point t. On considère une suite $t_i \to t$. La suite $p_i = \gamma(t_i)$ est une suite de Cauchy (grâce à la définition d'une géodésique), elle converge donc vers un point $p \in X$ puisque X est complète. On peut donc prolonger γ en p.

Maintenant, on montre qu'on peut toujours prolonger γ au-delà de p. En effet, Il existe un voisinage ouvert de p qui est isométrique à un ouvert du plan hyperbolique, et un rang n à partir duquel p_n est dans ce voisinage. On peut alors prolonger la géodésique au-delà de p dans cet ouvert du plan hyperbolique. Donc toute géodésique se prolonge en une géodésique maximale

Réciproquement si X est géodésiquement complet. On montre tout d'abord qu'entre deux points de X il existe toujours une géodésique. Soit $x, y \in X$. On prends une carte locale autour de X et on prends K une boule fermée d'intérieur non-vide centrée en x dans cette carte (K est compacte). On considère alors le point x_1 qui minimise la distance de y à K (ce point existe par compacité de K). On prends alors la géodésique entre x et x_1. Et on prolonge cette géodésique. On peut montrer que cette géodésique atteint y ;

Ensuite on considère (p_i) une suite de Cauchy dans X. Et on considère les segments géodésiques entre un point x et p_i. L'intersection de ces géodésiques avec le bord de la boule K donne une suite convergente de points y_i (car c'est une suite de Cauchy dans un compact). On prends alors la géodésique entre x et la limite y de ces points y_i. Par continuité des géodésiques on en déduit qu'une sous-suite p_{k_i} converge donc p_i converge.

□

On peut noter qu'une surface hyperbolique à bord totalement géodésique n'est pas géodésiquement complète même si elle est complète pour la métrique. Il est impossible de prolonger les géodésiques arrivant transversalement au bord.

C . Exemples

(1) Structure hyperbolique sur une surface de genre g

On considère le polygone à $4g$ côtés avec les identifications habituelles des arêtes opposées. Topologiquement, c'est une surface de genre g. On peut trouver un polygône régulier dans le plan hyperbolique avec des angles $\frac{\pi}{2g}$.

On peut remarquer qu'après identification, il n'y a qu'un seul sommet. On peut spécifier une structure hyperbolique sur le quotient du polygône par les identifications de côtés. Autour d'un point intérieur, on peut trouver un voisinage sans problème. Autour d'un point sur une arête, on recolle deux demi-morceaux. Autour du sommet, on recolle $4g$ secteurs d'angle $\frac{\pi}{2g}$, ce qui défini bien un homéomorphisme sur $\mathbb{H}$.

(2) Quotient de $\mathbb{H}$ par un groupe fuchsien

On rappelle qu'un groupe Γ est un groupe fuchsien sans torsion si et seulement si Γ agit librement et proprement discontinument sur $\mathbb{H}$. On rappelle

Définition 1 .12 : On dit que Γ agit de façon proprement discontinue sur un espace E si et seulement si pour tout compact $K \subset E$, l'ensemble

$$\{g \in \Gamma, g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$$

est fini

On dit que l'action est libre si tous les stabilisateurs sont triviaux.

On note $\pi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}/\Gamma = X$ l'application de revêtement naturelle. On munit X d'une structure hyperbolique de la façon suivante.

Soit $p \in X$, et soit U_p un voisinage ouvert de p suffisamment petit. Soit ϕ_p un homéomorphisme identifiant U_p avec l'un quelconque des relevés de U_p. La collection des cartes $\{(U_p, \phi_p)\}$ est une structure hyperbolique sur X. (La métrique obtenue ici est complète.)

Deuxième cours

Proposition 1 .4 Si Γ agit librement et proprement discontinument sur $\mathbb{H}$ alors la surface hyperbolique $\mathbb{H}/\Gamma$ est complète

On peut construire des exemples de métriques non complètes relativement facilement. Supposons qu'on a une métrique hyperbolique complète sur une surface fermée de genre g. On considère la surface avec une piqûre munie de la structure induite. Cette métrique n'est pas complète (on ne peut pas prolonger les géodésiques qui "visent" la piqûre).

Alors à quoi ressemble une métrique hyperbolique complète sur une surface avec une piqûre ?

(3) Bouts de la surface

Si le bord du domaine fondamental de Γ ou du polygone P rencontre $\partial\mathbb{H}$, alors la surface obtenue possède des "bouts".

Un bout d'un espace topologique non-compact X est une fonction e qui associe à chaque sous-ensemble compact $K \subset X$ une composante connexe non-vide $e(K)$ du complémentaire $X \setminus K$ de sorte que si $K \subset K'$ alors $e(K') \subset e(K)$.

A homéomorphisme près, la surface $\mathbb{H}/\Gamma$ obtenue est une surface fermée auquel on a retiré des points marqués. Cependant on a deux types de comportements pour ces bouts, que nous allons voir sur un exemple.

- **Cusp** On considère un quadrilatère idéal dans $\mathbb{H}$ et on identifie les côtés opposés. Topologiquement, la surface quotient est un tore avec une piqûre qui correspond au sommet du quadrilatère. On peut noter que cette surface n'est pas compacte.

  On dit que S a un cusp si il existe un voisinage d'une piqûre qui s'envoie par une carte locale sur le voisinage d'un cusp $\mathbb{H}/P$ ou P est un élément parabolique.
- Entonnoir

  On construit un groupe de schottky à deux générateurs de sorte que les boules soient entremêlées (voir dessin). On identifie donc les côtés opposés. Topologiquement la

surface obtenue est un tore avec une composante de bord (correspondant au recollement des 4 secteurs hyperboliques). On obtient donc une métrique hyperbolique complète sur la surface.
On peut considérer une sous-surface compacte et convexe avec du bord totalement géodésique ayant les propriétés de la surface de départ. On considère les perpendiculaires communes au disques adjacents. Cela forme un domaine fondamental pour l'action de Γ sur un convexe du plan hyperbolique.

Sur la surface, ce domaine fondamental correspond à la sous-surface obtenue si on coupe le long de la géodésique. On peut considérer la sous-surface obtenue en ne considérant que la partie compacte obtenue par la construction précédente, est appelé le coeur compact de $\mathbb{H}/\Gamma$.
Réciproquement, si on considère un octogone régulier à angles droits. On identifie deux paires de côtés opposés. Topologiquement, la surface obtenue est un tore avec une composante de bord constituée de l'union des 4 géodésiques qui n'ont pas d'identification. On obtient une structure hyperbolique complète à bord totalement géodésique.

(4) Recollement de deux surfaces à bord totalement géodésique

Si S_1 et S_2 sont deux surfaces à bord totalement géodésique avec C_1 et C_2 deux composantes de bord de même longueur (ce sont des cercles munis d'une métrique). Etant donné une isométrie $\phi : C_1 \to C_2$. On peut munir le quotient $(S_1 \cup S_2)/(\phi(C_1) = C_2)$ d'une structure hyperbolique. En effet, le recollement de deux demi-espaces donne un espace.

(5) Structure hyperbolique sur un revêtement

On rappelle qu'un revêtement de X est un espace topologique C et une application $\pi : C \to X$ continue et surjective telle que pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert U contenant x satisfaisant la condition suivante : L'image réciproque $\pi^{-1}(U)$ est une union disjointe d'ouverts de C et chacun de ces ouverts est envoyé homéomorphiquement sur U par π.

Si X est une surface hyperbolique et C un revêtement, alors on peut munir C d'une structure hyperbolique induite par la structure de X. Les cartes ouvertes de C sont les préimages des cartes locales de X. Et les applications locales sont données par les restrictions à chaque feuille des applications $\phi_i \circ \pi$.

III . Théorème d'uniformisation

Le théorème très important montre que toute surface hyperbolique peut se voir comme le quotient du plan hyperbolique par un groupe fuchsien.

Théorème 1 .3 Soit X une surface hyperbolique complète sans bord. Alors il existe un groupe fuchsien $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{H})$ isomorphe à $\pi_1(X)$ agissant librement et proprement discontinument sur $\mathbb{H}$, tel que X soit isométrique à $\mathbb{H}/\Gamma$.

La démonstration de ce théorème est assez longue et on la décompose en plusieurs étapes.

A . **Application Développante**

On va construire pour toute surface hyperbolique X une application, dite développante

$$\mathrm{Dev} : \widetilde{\mathrm{X}} \to \mathbb{H}$$

entre le revêtement universel de X et le plan hyperbolique.

Soit $\{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ un atlas définissant une structure hyperbolique sur X. Et soit x_0 un point base, fixé une fois pour toute.

Soit $[\gamma] \in \widetilde{X}$ avec $\gamma : [0,1] \to X$ satisfaisant $\gamma(0) = x_0$, un représentant de la classe de $[\gamma]$. On peut trouver un recouvrement de $\gamma([0,1])$ par des cartes ouvertes de sorte que $U_i \cap U_{i+1}$ est connexe. On définit Dev de façon itérative.

$$\mathrm{Dev}_{|\mathrm{U_0}\cap\gamma} = \phi_{0|\mathrm{U_0}\cap\gamma}$$

comme $U_0 \cap U_1$ est connexe, on peut dire que $\phi_0 \circ \phi_1^{-1} = T_1 \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H})$. On définit alors

$$\mathrm{Dev}_{|\mathrm{U_1}\cap\gamma} = \mathrm{T_1} \circ \phi_{1|\mathrm{U_1}\cap\gamma}$$

On a maintenant défini Dev sur $(U_0 \cup U_1) \cap \gamma$. De façon itérative on obtient

$$\mathrm{Dev}_{|\mathrm{U_n}\cap\gamma} = \mathrm{T_1} \circ \mathrm{T_2} \circ \cdots \circ \phi_{\mathrm{n}|\mathrm{U_n}\cap\gamma}$$

On a donc défini Dev sur toute la courbe γ. On pose alors

$$\mathrm{Dev}([\gamma]) = \mathrm{Dev}(\gamma(1)) \in \mathbb{H}$$

Il reste à montrer que Dev$([\gamma])$ ne dépend pas

- du choix de $U_0, \ldots, U_n$,
- du choix d'un représentant γ.

Pour la preuve du premier point, il suffit de considérer le cas où $n = 1$ et donc on a deux recouvrements ouverts (U_0, U_1) et (U_0, U_1'). On peut supposer sans perte de généralité que $U_1 \cap U_1'$ est connexe et non-vide. Soit $T = T_1^{-1} \circ T_1'$ l'isométrie étendant $\phi_1 \circ \phi_1'^{-1}$. On a alors

$$\mathrm{Dev}_{|\mathrm{U_1}\cap\mathrm{U_1'}\cap\gamma} = \mathrm{T_1^{-1}} \circ \phi_{1|\mathrm{U_1}\cap\mathrm{U_1'}\cap\gamma}$$

Et d'autre part

$$\mathrm{Dev}'_{|\mathrm{U_1}\cap\mathrm{U_1'}\cap\gamma} = \mathrm{T_1'^{-1}} \circ \phi_{1'|\mathrm{U_1}\cap\mathrm{U_1'}\cap\gamma} = \mathrm{T_1^{-1}} \circ \mathrm{T} \circ \phi_1' = \mathrm{T_1^{-1}} \circ \phi_1$$

On en déduit que Dev = Dev$'$ sur γ.

Pour la preuve du deuxième point, on choisit γ_0 et γ_1 deux chemins homotopes et H une homologie entre γ_0 et γ_1. On peut trouver une subdivision

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_u = 1 \quad , \quad 0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_v = 1$$

telle que $H([t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}])$ se trouve entièrement dans une carte locale. A l'intérieur d'une même carte locale, les homotopies ne changent pas l'application développante. et on peut passer de γ_0 à γ_1 par une suite de mouvements élémentaires dans chacune des petites cartes locales (dessin du snake).

B . Propriétés de l'application développante

Lemme 1 .1 Si $\widetilde{X}$ est muni de la structure hyperbolique venant de celle de X, l'application Dev est une isométrie locale

Relativement évident d'après la construction

Lemme 1 .2 Si X est une surface hyperbolique complète alors $\widetilde{X}$ l'est aussi

Démonstration : Soit $(\widetilde{z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\widetilde{X}$. La projection $\pi : \widetilde{X} \to X$ n'augmente pas les distances, donc la suite $z_n = \pi(\widetilde{z}_n)$ est une suite de cauchy qui converge vers un certain $z \in X$. Soit U un petit voisinage autour de z (de sorte que $\pi^{-1}(U)$ est une union disjointe).

Comme $\widetilde{z}_n$ est de Cauchy, il existe un rang à partir duquel les $\widetilde{z}_n$ appartiennent à un même relevé $\widetilde{U}$ de U. On en déduit alors que la suite converge vers l'unique relevé de z se trouvant dans la préimage $\widetilde{U}$.

$\square$

Lemme 1 .3 L'application Dev est un revêtement surjectif

Démonstration : L'application Dev est un homéomorphisme local. Pour montrer que c'est un revêtement, il suffit de montrer qu'on peut relever les chemins dans $\mathbb{H}$ par des chemins dans $\widetilde{X}$.

Soit $\widetilde{z_0} \in \widetilde{X}$ et $z_0 = \mathrm{Dev}(\widetilde{z_0})$. Soit un chemin quelconque $\gamma : [0,1] \to \mathbb{H}$ tel que $\gamma(0) = z_0$. Soit alors

$$t_0 = \sup\left\{t \in [0,1] \;\;|\;\; \exists\widetilde{\gamma} : [0,t] \to \widetilde{X}, \mathrm{Dev} \circ \widetilde{gamma} = \gamma_{|[0,t]}\right\}$$

Il suffit de montrer que $t_0 = 1$ pour prouver qu'on peut relever le chemin. Comme Dev est un homéomorphisme local, il suffit de montrer que le sup est un max. En effet, si le sup est atteint et $t_0 < 1$, alors on pourrait étendre à un voisinage par homéo local.

Considérons une suite $t_n \to t_0$. Alors $\widetilde{\gamma}(t_n)$ est une suite de Cauchy dans $\widetilde{X}$, donc elle converge d'après le lemme précédent. Donc $\widetilde{\gamma}(t_0)$ est la limite et donc $\widetilde{\gamma}$ peut être défini en t_0, ie le sup est un max.

$\square$

Comme $\mathbb{H}$ est simplement connexe, on en déduit que $\widetilde{X}$ est homéomorphe à $\mathbb{H}$. Comme c'est également une isométrie locale, on en déduit finalement :

Théorème 1 .4 L'application Dev est une isométrie.

C . Holonomie

On va maintenant définir l'application d'holonomie

$$\mathrm{hol} : \pi_1(\mathrm{X},\mathrm{x}) \to \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H})$$

L'image de cette application d'holonomie sera exactement le groupe Γ cherché.

Les éléments du $\pi_1(X,x)$ peuvent se voir comme des éléments de $\widetilde{X}$, on peut donc définir pour $[\gamma] \in \pi_1(X,x)$, l'élément $\mathrm{hol}([\gamma]) = \mathrm{T}_1 \circ \cdots \circ \mathrm{T}_\mathrm{n}$ où les T_i sont donnés par la construction de l'application développante. Cela donne bien un élément de $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H})$ et donc une application hol.

Il est clair que l'application d'holonomie est un homomorphisme et ne dépend que du choix initial de la première carte (U_0). Deux choix différents pour la carte locale U_0 (et le point base x) produisent deux représentations d'holonomie conjuguées.

Proposition 1 .5 L'application d'holonomie est injective

Démonstration : Soit $[\gamma] \in \pi_1(X,x)$ tel que $\mathrm{hol}([\gamma]) = \mathrm{id}$. Alors l'image par l'application développante de γ est un lacet basé en $p \in \mathbb{H}$. Comme $\mathbb{H}$ est simplement connexe, on peut trouver une homotopie entre ce lacet et un point. Comme Dev est un revêtement, on peut relever cette homotopie en une homotopie entre γ et un point.

$\square$

On peut maintenant finir la preuve du théorème d'uniformisation.

L'application d'holonomie donne une identification de $\pi_1(X,x)$ avec un groupe fuchsien $\Gamma = \mathrm{hol}(\pi_1(\mathrm{X},\mathrm{x}))$. Comme $\pi_1(X,x)$ agit sur $\widetilde{X}$ de façon libre et proprement discontinue, la même chose est vraie pour l'action de Γ sur $\mathbb{H}$. Ainsi Γ est un groupe fuchsien sans torsion.

Le revêtement universel étant isométrique à $\mathbb{H}$ par l'application développante, on en déduit que $X = \widetilde{X}/\pi_1(X,x)$ est isométrique à $\mathbb{H}/\Gamma$.

On peut noter le corollaire suivant

Proposition 1 .6 Si Γ est l'holonomie d'une structure hyperbolique alors Γ ne contient pas d'élément elliptique. De plus, les éléments paraboliques de Γ correspondent exactement aux courbes librement homotopes à un voisinage des piqûres de S.

D . Surfaces à bord

Lorsque la surface a du bord, le revêtement universel a également du bord (et ne peut donc pas être $\mathbb{H}$). Néanmoins, le revêtement universel s'identifie avec un convexe du plan hyperbolique, et l'action de Γ sur ce convexe est proprement discontinue.

Théorème 1 .5 Soit X une surface hyperbolique complete à bord totalement géodésique. Alors il existe un groupe fuchsien Γ sans torsion et un sous-ensemble convexe $\mathcal{C} \subset \mathbb{H}$ tel que $X = \mathcal{C}/\Gamma$.

On peut recoller la surface à bord totalement géodésique avec des entonnoirs (de façon unique). De cette façon, on obtient une surface complète $\hat{S}$ dont la structure hyperbolique sur S est exactement la métrique induite. Comme $\hat{S}$ est isométrique à $\mathbb{H}/\Gamma$, on peut considérer les relevés des géodésiques correspondant au bord de S. Cela borde un fermé connexe du plan hyperbolique.

On peut également considérer l'application développante comme pour les surfaces sans bord. Dans ce cas, la développante n'est pas surjective mais est quand même un revêtement sur son image.

Si S est une surface hyperbolique complète avec des bouts en entonnoir sans cusp, il existe une unique sous-surface hyperbolique compacte à bord totalement géodésique ayant la même holonomie. On appelle cette surface le coeur convexe de S (ou le coeur compact).

Dans la suite, on dira souvent simplement surface hyperbolique pour "surface munie d'une structure hyperbolique complète à bord totalement géodésique".

IV . Courbes et géodésiques

A . Chemins

Le théorème d'uniformisation nous permet de montrer facilement le résultat suivant :

Théorème 1 .6 Soit X une surface hyperbolique. Etant donné $p, q \in S$ et un chemin c reliant p à q. Il existe une unique géodésique γ_c joignant p à q qui soit homotope à γ. La longueur de γ_c est minimale parmi les longueurs de toutes les chemins homotopes à c.

Démonstration : On passe au revêtement universel, qui est un convexe de $\mathbb{H}$. Soit $\widetilde{p}$ un relevé de p. On utilise la propriété de relèvement des chemins pour trouver un chemin c qui relie $\widetilde{p}$ à un point $\widetilde{q}$. On a alors une unique géodésique dans $\mathcal{C}$ joignant $\widetilde{p}$ à $\widetilde{q}$. La projection de cette géodésique sur S est homotope à γ. (pour montrer que c'est bien une homotopie, on peut utiliser la projection de la courbe c sur la géodésique γ_c.

□

Le théorème s'étend au cas des lacets basés en p. Cependant, le chemin géodésique de p à p obtenu, n'est en général pas une courbe géodésique $\mathbb{S} \to X$. En effet, au point p, la géodésique n'a pas de raison d'être lisse (elle fait un angle) (Faire un dessin)

B . Courbe fermée et holonomie

Pour des courbes fermées, il faut faire attention aux piqures.

Proposition 1 .7 Soit X une surface hyperbolique et ρ une représentation d'holonomie. Soit γ une courbe (simple). $\rho(\gamma)$ est parabolique si et seulement si γ est homotope à un lacet dans un petit voisinage d'une piqûre

Démonstration : La structure étant complète, l'holonomie autour d'une piqûre est parabolique. Réciproquement, si $\rho(\gamma)$ est parabolique alors il existe une géodésique fermée de longueur arbitrairement petite (il suffit de prendre deux points de $\mathbb{H}^2$ qui sont l'image l'un de l'autre et proche.) Le point fixe du parabolique est un point idéal de $\mathbb{H}$ qui correspond donc à une piqûre.

□

Théorème 1 .7 Soit X une surface hyperbolique. Si α est un lacet qui n'est pas librement homotope au voisinage d'une piqure, alors il existe une unique géodésique γ_c librement homotope à c dont la longueur est minimale parmi les longueurs de toutes les courbes librement homotopes à c.

Démonstration : On a $\alpha : [0,1] \to X$. On choisit un relevé au revêtement universel $\mathbb{H}$ noté $\widetilde{\alpha} : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$.

La courbe $\widetilde{\alpha}$ est stable sous l'action de $g = \mathrm{hol}([\alpha]) \in \mathrm{G}$. Par hypothèse sur le lacet α, l'élément g est hyperbolique (si il était parabolique, alors on aurait un cusp). On considère l'axe de translation A de l'élément g, et on projète sur le quotient $\mathbb{H}/\Gamma$, ce qui nous donne une géodésique fermée γ. Cette géodésique est librement homotope à α.

Pour l'unicité. Comme le cercle est un compact, la distance entre deux géodésique fermée est bornée dans X. Donc en passant aux relevés dans $\mathbb{H}$, la distance reste bornée. Deux géodésiques à distance bornées sont égales.

□

C . Simplicité et intersection

On montre finalement que les géodésiques réalisent la "meilleure position" des courbes vis-a-vis des intersections. On rappelle qu'une courbe sur X est dite *simple* si elle n'a pas d'auto-intersection (autrement dit, c'est un plongement).

Proposition 1 .8 Soit c une courbe simple (non homotope à une courbe bordant une piqure). Alors la géodésique γ_c est simple également.

Démonstration : On sait que si c est simple alors ses relevés dans $\mathbb{H}$ ne se coupent pas (entre eux et eux-mêmes). En particulier, les extrémités ne sont jamais entremêlées. Le représentant géodésique étant à distance borné, il a les mêmes extrémités, donc les extrémités ne sont pas entremêlées, donc deux relevés de la géodésique ne se croisent pas.

□

Proposition 1 .9 Soient γ_1 et γ_2 deux courbes simples non homotopiquement triviale ni égales entre elles et transverses. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) Les deux courbes réalisent le minimum d'intersection dans leur classes d'homotopie libre.

(2) Les deux courbes ne bordent pas un bigone

(3) Deux relevés donnés de γ_1 et γ_2 dans $\widetilde{S}$ se croisent au plus une fois.

De plus, si γ_1 et γ_2 sont deux géodésiques γ_1 et γ_2 alors les conditions sont vérifiées.

Démonstration : (i) ⇒ (ii) : est relativement évident. Si les deux courbes bordent un bigone, on peut trouver une homotopie qui réduit l'intersection strictement.

(iii) ⇒ (ii) : Si les deux courbes bordent un bigône alors en relevant dans le revêtement universel, comme le bigone est simplement connexe, il se releve en un bigone. Donc deux relevés se croisent deux fois.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Supposons qu'on a une homotopie de γ_1 qui réduit l'intersection. L'image réciproque de la trace de γ_2 sur $h_t(\gamma_1)$ est une sous-variété e dimension 1 dans un cyclindre. L'hypothèse que le nombre d'intersection est réduit prouve qu'il y a un bigone (voir dessin)

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Supposons que des composantes se croisent en plus d'un point. On peut facilement trouver un disque dont le bord est composé d'un arc de γ_1 et d'un arc de γ_2. Mais ce disque n'est pas forcement minimal. On choisit alors un sous-disque minimal dans ce disque bordé par ce qu'il faut (pas forcément les courbes de départ).

Pour la dernière affirmation, il est clair que deux géodésiques sur X ne bornent jamais un bigône (une zone simplement connexe). En effet en relevant à $\mathbb{H}$ on aurait deux géodésiques qui se coupent deux fois. Donc les relevés de α et de β se coupent au plus une fois chacun.

$\square$