

2 . Espace de Teichmuller

I . Différentes Definitions

A . Définition par structure hyperbolique marquée sur Σ

Soit Σ une surface topologique (compacte avec piqure). Se donner une structure hyperbolique sur Σ revient à se donner une surface hyperbolique X et un homéomorphisme $\phi : \Sigma \rightarrow X$ appelé marquage.

On dit que deux structures (X, f) , et (Y, g) sur Σ sont homotopes si il existe une isométrie $i : X \rightarrow Y$ telle que $i \circ f$ est homotope à g . (Ici, les homotopie peuvent déplacer les points dans le bord de Y .)

On peut faire un dessin pour comprendre comment on peut avoir deux surfaces X et Y isométriques mais un marquage différent qui rend les structures non-homotopes.

Définition 2 .13 : L'espace de Teichmuller $\mathcal{T}(\Sigma)$ est l'ensemble des classes d'homotopie de structure hyperbolique sur Σ .

B . métriques de courbure -1

Soit Σ une surface. L'espace de teichmuller est défini de façon équivalente comme l'ensemble des métriques riemannienne de courbure constante égale à -1 sur Σ , quotient par la relation d'isotopie.

Si g et h sont deux métriques sur Σ alors les deux métriques sont équivalente si il existe une isométrie $(\Sigma, g) \rightarrow (\Sigma, h)$ qui soit isotope à l'identité.

(i.e. il existe $\Phi : \Sigma \times [0, 1] \rightarrow \Sigma \times [0, 1]$ difféomorphisme tel que $\Phi(x, t) = (\phi_t(x), t)$ avec les définitions qui coïncident bien).

On n'utilisera pas ce point de vue dans la suite.

C . Définition algébrique

On commence par le cas des surfaces fermées. Soit $\Sigma = \Sigma_g$ la surface fermée de genre $g \geq 2$. On notera ici $G^+ = \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ et $G = \text{PGL}(2, \mathbb{R})$ le groupe des isométries (directes) du plan hyperbolique.

Une représentation $\rho : \pi \rightarrow G$ est dite *fidèle* si ρ est injective. (Une représentation est un morphisme dans les bijections de $\mathbb{H}$, ce qui définit donc une action de π sur $\mathbb{H}$. C'est cette action qui est fidèle)

Une représentation est discrete, si son image est un sous-groupe discret de G (donc un groupe fuchsien).

Le groupe G agit sur $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma), G^+)$ par conjugaison. On peut donc considérer le quotient $\mathfrak{X}(\Sigma, G) = \text{Hom}(\pi_1(\Sigma), G^+)/G$ appelé variété des caractères. On note également

$$\text{DF}(\pi_1(\Sigma), G^+) = \{\rho : \pi_1(\Sigma) \rightarrow G^+, \rho \text{ fidèle et discret}\}$$

Théorème 2.8 On a une correspondance naturelle :

$$\mathcal{T}(\Sigma_g) = \text{DF}(\pi_1(\Sigma), \mathbb{G}^+)/\mathbb{G}$$

Démonstration : Soit $[(X, \phi)] \in \mathcal{T}(\Sigma_g)$. On choisit un point base et une carte locale autour de ce point base. Cela nous permet de construire la représentation d'holonomie

$$\rho : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$$

L'homéomorphisme ϕ induit un isomorphisme entre les groupes fondamentaux $\phi_* : \pi_1(\Sigma_g) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$. Ces identifications nous permettent d'obtenir une représentation $\rho : \pi_1(\Sigma_g) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

La représentation ρ dépend des choix que nous avons fait (représentant X , point base, carte locale, homéo ϕ). Il reste à montrer que la classe de conjugaison de ρ ne dépend pas des choix.

- Le choix du point base et de la carte locale change l'application développante par une post-composition par un élément de $\text{Isom}(\mathbb{H})$. Donc cela change l'holonomie par une conjugaison.
- Changer (X, ϕ) dans sa classe d'homotopie revient simplement à changer ϕ . Mais une modification de ϕ ne change pas la représentation ρ . En effet, une isotopie de S bouge les points dans le relevé de façon bornée (par compacité), et donc ne change pas l'action sur $\partial\mathbb{H}$.
- Enfin l'isomorphisme entre $\pi_1(\Sigma_g)$ et $\pi_1(X, x_0)$ est bien définie à un choix du point base près, et donc à conjugaison près.

Réciproquement, soit $[\rho]$ une classe de conjugaison de représentation fidèle et discrète. Alors ρ définit une action de $\pi_1(\Sigma_g)$ sur $\mathbb{H}$. Cette action est proprement discontinue puisque l'image de ρ est discrète. De plus l'action est libre.

En effet, si l'action n'est pas libre il existerait un point de $\mathbb{H}$ fixé par un élément $\rho(\gamma)$. Donc $\rho(\gamma)$ est un élément elliptique. Soit il est d'ordre fini et alors la représentation n'est pas injective (puisque'il n'y a pas d'élément d'ordre fini dans $\pi_1(\Sigma_g)$), soit il est d'ordre infini ce qui contredit la discrétude de l'image.

Donc $\mathbb{H}/\rho(\pi_1(\Sigma_g)) = X$ est une surface hyperbolique. Et de plus ρ étant un isomorphisme sur son image, on en déduit que $\pi_1(X) = \pi_1(\Sigma_g)$.

Pour deux surfaces *fermées*, et un isomorphisme de groupe fondamental (aussi appelé équivalence d'homotopie) il existe un homéomorphisme réalisant cette isomorphisme. Cet isomorphisme est bien défini à homotopie près.

Si on remplace ρ par un de ses conjugué ρ' , alors $\mathbb{H}/\rho$ est isométrique à $\mathbb{H}/\rho'$ et définit donc bien le même point de l'espace de Teichmüller.

Les deux constructions sont l'inverse l'une de l'autre.

□

D . Surfaces non-fermées

Pour les surfaces non-fermées, on doit imposer une condition supplémentaire aux représentations. En effet, il y a des surfaces non-homéomorphes qui ont le même groupe fondamental. Par exemple une sphère à 3 trous et un tore à un trou ont le même groupe fondamental qui est le groupe libre à deux générateurs. On considère donc l'ensemble des représentations fidèles et discrètes qui correspondent à l'holonomie d'une structure hyperbolique sur une surface homéomorphe à S .

Si Σ est une surface sans bord avec p piqure, on dit qu'un élément γ est périphérique si un représentant est librement homotope à une courbe autour d'une piqure.

Une représentation $\rho : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ de $\pi_1(\Sigma)$ est dite "préservant le type" si $\rho(\gamma)$ parabolique $\Leftrightarrow \gamma$ périphérique.

Proposition 2 .10 Si Σ est une surface sans bord avec p piqures, alors l'espace de Teichmüller est en bijection avec l'ensemble des classes de conjugaison de représentation fidèle, discrète et préservant le type.

Pour des surfaces à bord, on ne peut pas trouver un analogue à cette proposition. Par exemple on peut trouver des représentations de F_2 totalement hyperbolique et telles que les surfaces associées sont des sphères à trois trous ou des tore à un trou

Cependant, on peut quand même généraliser la notion de type. On dit que $\rho : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ préserve le type si le quotient $\mathbb{H}/\rho(\pi_1(\Sigma))$ est homéomorphe à l'intérieur de Σ .

On a donc une identification générale :

$$\mathcal{T}(\Sigma) = \{\rho : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}), \text{fidèle, discrète, préservant le type}\}$$

Les deux cas précédents montrent que si Σ est une surface fermée, alors toute représentation fidèle et discrète préserve le type. Et si Σ est une surface à piqure, la condition de ne pas avoir de parabolique accidentel est équivalente à la préservation du type.

II . Topologie sur l'espace de Teichmuller

A . Par la définition algébrique

Avec la définition algébrique, l'espace de Teichmüller porte une topologie naturelle. En effet, si on considère $\pi_1(S)$ avec la topologie discrète (toute partie est ouverte, donc les points sont isolés) et G avec sa topologie naturelle de groupe de Lie, on peut munir $\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma), G)$ de la topologie compacte-ouverte (engendré par les cylindres $V(K, U) = \{f \in \mathrm{Hom}(\pi, G), f(K) \subset U\}$ avec K compact et U ouvert.)

De façon plus concrète, un homomorphisme $\rho : \pi_1(\Sigma) \rightarrow G$ est déterminé par l'image d'un ensemble générateur de $\pi_1(\Sigma)$, ce qui nous donne une inclusion naturelle de $\mathrm{Hom}(\pi, G)$ dans G^{2g} qui peut être muni de la topologie naturelle de groupe de Lie. On a alors une topologie induite sur $\mathrm{Hom}(\pi, G)$, qui ne dépend pas de l'ensemble générateur choisi. On peut vérifier que les deux topologies sont équivalentes.

Dans tous les cas, l'ensemble des représentations fidèles et discrètes possède alors une topologie induite et on peut considérer la topologie quotient. Cette topologie nous donne finalement une topologie sur $\mathcal{T}(\Sigma)$ par l'identification entre les deux définition de l'espace de Teichmüller.

B . Estimation de la dimension

On peut voir à partir de cette identification que l'espace de Teichmüller est un espace de dimension finie. On peut même donner une heuristique pour la dimension de cet espace.

Le groupe G^+ est de dimension 3. On a un choix d'une matrice pour chaque générateur de $\pi_1(\Sigma)$. Cela nous donne $6g$. Mais on a une relation entre les générateurs, donc -3 , et on prends le quotient par conjugaison -3 .

La dimension de l'espace de Teichmuller devrait être $6g - 6$.

On peut également voir l'espace de Teichmüller comme un espace de $4g$ -gone hyperbolique qui pavent le plan hyperbolique. Il y a $4g$ sommets à choisir dans le plan hyperbolique (ce qui donne un espace de dimension $8g$). Cependant, pour identifier les côtés correspondant, on a $2g$ équations qui apparaissent. De plus, il faut que la somme des angles intérieurs fasse 2π (1 équation). On peut faire agir le groupe d'isométrie du plan hyperbolique (3 dimensions) et on peut également bouger le point base (2 dimension). Cela donne bien $6g - 6$ au final.

Cependant, ce calcul heuristique ne nous donne qu'une information très incomplète. Cela représente en quelque sorte la dimension maximale de l'espace tangent à l'espace de Teichmüller en un point. Il pourrait y avoir des points où l'espace tangent est beaucoup plus petit (des coins de l'espace). De plus, cela ne nous dit rien de la topologie de l'espace de Teichmüller.

C . Composantes de la variété de caractères

On peut se demander quel genre de sous-ensemble constitue l'ensemble des représentations fidèles et discrètes à l'intérieur de l'ensemble de toutes les représentations. Etant donné une représentation $\rho : \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ on peut définir un invariant appelé classe d'Euler. Cet invariant peut se définir de multiples façons différentes, et nous allons en voir une façon algébrique relativement simple (mais un peu en dehors du cadre du cours) :

Le groupe fondamental du groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ est $\mathbb{Z}$. En effet, on peut voir le groupe comme le fibré tangent unitaire sur $\mathbb{H}$. Le revêtement universel de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, noté $\tilde{G}$ est un groupe de Lie simplement connexe. (Note : c'est un groupe de Lie de dimension finie, mais il n'est pas linéaire)

On choisit une présentation de $\pi_1(S)$:

$$\pi_1(S) = \langle a_1, b_1, \dots, b_g \mid \prod [a_i, b_i] \rangle$$

On a donc les images des générateurs $\rho(a_i)$ et $\rho(b_i)$. On choisit arbitrairement des relevés $\widetilde{\rho(a_i)}$ et $\widetilde{\rho(b_i)}$ dans $\tilde{G}$. On calcule alors

$$\prod [\widetilde{\rho(a_i)}, \widetilde{\rho(b_i)}] = z$$

Il est clair que z est un relevé de l'identité dans $\tilde{G}$. Les relevés de l'identité sont en bijection naturelle avec $\pi_1(\mathbb{G}) = \mathbb{Z}$. On peut montrer que ce nombre ne dépend pas des relevés choisis. Ce nombre est invariant par conjugaison dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. (seule sa valeur absolue est invariante par conjugaison dans $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$). Cet entier est appelé la classe d'Euler de la représentation.

Pour une surface à bord, on utilise une classe d'Euler relative. En effet, pour des surfaces à bord, le nombre z obtenu dépend du choix des relevés. Cependant pour chaque composante de bord, il existe un relevé "préféré" (car l'holonomie est non-elliptique, et donc on peut trouver un point fixe).

On peut montrer que la classe d'Euler relative d'un pantalon est dans $\{-1, 0, 1\}$ et que la classe d'Euler est additive. On en déduit l'inégalité de Milnor-Wood :

$$|e(\rho)| \leq |\chi(S)|$$

Il y a donc $4g - 3$ valeurs possibles de l'invariant.

L'application donnant la classe d'Euler est continue. Cet invariant est donc constant sur chaque composante connexe de l'espace des représentations. C'est à dire que $e^{-1}(k)$ est une union de composantes connexes. Un théorème important de Goldman montre :

Théorème 2.9 (Goldman 88) Les composantes connexes sont exactement indexées par les valeurs possibles de la classe d'Euler. Une représentation est fidèle et discrète si et seulement si $|e(\rho)| = |\chi(S)|$.

Démonstration largement hors programme.

III . Coordonnées de Fenchel-Nielsen

A . Fonctions Longueurs

a) Sur une structure hyperbolique marquée On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des classes d'homotopie libre des courbes simples sur la surface. Si c est une telle classe d'homotopie de courbe simple dans S et (X, ϕ) un point de l'espace de Teichmüller de S , alors il existe une unique géodésique dans la classe c . On peut alors noter $l_X(c)$ la longueur de cette géodésique. Cette longueur ne dépend pas du représentant choisi (X, ϕ) dans la classe d'homotopie $[(X, \phi)]$.

On peut donc comprendre une structure hyperbolique à partir de ces fonctions longueurs. On verra que la donnée de l'ensemble des fonctions longueurs des courbes simples détermine entièrement le point de l'espace de Teichmüller.

b) Version algébrique

Soit $[\rho]$ un point de l'espace de Teichmüller, avec $\rho : \pi_1(S) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ une représentation fidèle, discrète et préservant le type.

Si $\gamma \in \pi_1(S)$, alors on peut considérer $\text{tr}(\rho(\gamma))$ qui est bien définie puisque la trace est invariante par conjugaison. La fonction $t_\gamma : [\rho] \mapsto \text{tr}(\rho(\gamma))$ est une fonction continue sur $\mathcal{T}(S)$.

On a la correspondance suivante (exercice classique) entre la trace de $\rho(\gamma)$ et la longueur de l'unique géodésique dans la classe d'homotopie libre de γ , notée également l_γ .

$$l_X(\gamma) = 2 \cosh^{-1} \left(\frac{\text{tr}(\rho(\gamma))}{2} \right)$$

On peut remarquer que si γ est une courbe correspondant à une piqure, alors $\rho(\gamma)$ est un élément parabolique de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ donc sa trace est 2, et donc la longueur de la courbe est 0, ce qui correspond bien à l'idée qu'une courbe autour d'une piqure peut être aussi petite que l'on veut.

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 2 .11 Soit S une surface et $c \in \mathcal{S}$. La fonction suivante est continue

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(S) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longmapsto l_X(c) \end{aligned}$$

B . Décomposition en pantalons

Un *pantalon* est une surface compacte de genre 0 avec trois composantes de bord. C'est donc une sphère à trois trous.

Proposition 2 .12 Soit S une surface compacte avec $\chi(S) < 0$ qui n'est pas homéomorphe à un pantalon. Alors, il existe une courbe simple dans S qui n'est pas librement homotope à une composante de bord.

Démonstration : Immédiat par la classification des surfaces compactes. Il suffit de voir que si S a plus de 4 composantes, alors on peut en séparer 2 du reste de la surface. Et si S a du genre, on peut découper le long d'une courbe non-séparante.

□

Une courbe essentielle est une courbe qui n'est pas homotope à une piqure ou une composante de bord.

Définition 2 .14 : Une *décomposition en pantalon* de la surface compacte S est une collection maximale de courbes essentielles simples disjointes non-homotopes deux à deux

En effet, la caractérisation précédente montre qu'une telle famille décompose la surface en une union de pantalons disjoints.

Il est important de remarquer que lorsqu'on coupe une surface le long d'une courbe simple, la surface obtenue a la même caractéristique d'Euler que la surface de départ. Un pantalon ayant une caractéristique égale à -1 , on en déduit qu'une décomposition en pantalon est une collection de $3g + b - 3$ courbes simples qui découpe la surface en $2g - 2 + b$ pantalons.

C . Espace de teichmuller d'un pantalon

On commence par montrer le résultat suivant sur les hexagones hyperboliques marqués, c'est à dire simplement un hexagone à bord géodésique avec un sommet marqué. On note Hex l'ensemble des classes d'équivalences d'hexagone hyperboliques marqués à angles droits, où deux hexagones sont équivalents si il existe une isométrie (directe) envoyant l'un sur l'autre.

Proposition 2 .13 L'application :

$$\begin{aligned} W : \text{Hex} &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0}^3 \\ ABCDEF &\longmapsto (l(AB), l(CD), l(EF)) \end{aligned}$$

est un homéomorphisme.

L'application est bien définie puisque les isométrie préservent les longueurs et le marquage assure qu'on mesure les mêmes côtés. Il suffit donc de trouver un inverse à W .

Soit $(L_\alpha, L_\beta, L_\gamma) \in \mathbb{R}_{>0}^3$. Soit α_t et β_t deux géodésiques à distance t et γ'_t la perpendiculaire commune à ces deux géodésiques. On reporte sur α_t et β_t les longueurs L_α et L_β , et on trace les perpendiculaire α'_t et β'_t correspondantes. Alors si ces deux droites ne se rencontrent pas, on note γ_t la perpendiculaire commune et $L(t)$ la longueur du segment géodésique correspondant. Cette longueur $L(t)$ dépend continument de t . Par le TVI, on peut trouver une valeur t_0 pour laquelle $L_\gamma = L(t_0)$.

On peut alors passer au théorème correspondant pour les pantalons :

Théorème 2 .10 Soit P un pantalon et α, β, γ les trois composantes de bord. L'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(P) &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0}^3 \\ X &\longmapsto (l_\alpha(X), l_\beta(X), l_\gamma(X)) \end{aligned}$$

est un homéomorphisme

Démonstration : On montre d'abord un bijection entre Hex et $\mathcal{T}(P)$.

Si H est un hexagone hyperbolique à angle droits, on considère H' la réflexion de H le long de la géodésique correspondant à AE . On obtient alors un pantalon en identifiant les côtés de la bonne façon. Les longueurs correspondent au double des coordonnées sur H .

Si (X, ϕ) est une structure hyperbolique sur P alors on considère des arcs simples joignant un bord à un autre. On prends les arcs minimisant la longueur, ce sont des géodésiques et elles sont perpendiculaires au bord. En coupant le long de ces trois arcs, on obtient donc deux hexagones hyperboliques à angles droit qui sont isométrique l'un à l'autre (mais avec l'orientation inverse).

La continuité de l'application vient du fait que deux points de $\mathbb{R}^3$ proches donnent deux hexagones hyperboliques qui sont quasiment isométriques. Donc la représentation d'holonomie des pantalons obtenus en recollant sont proches dans l'espace de teichmuller.

□

On peut généraliser le théorème sur les pantalons aux surfaces où on remplace certaines composantes de bord par des piqures. Dans ce cas là, on montre que l'espace de Teichmuller est homéomorphe à $\mathbb{R}_{>0}^2$, $\mathbb{R}_{>0}$ ou bien est réduit à un point (faire en exercice).

D . Recollement

Soit S une surface fermée de genre $g \geq 2$. (Le cas des surfaces non fermées viendra plus tard) Pour définir les coordonnées de Fenchel-Nielsen on doit choisir un système de courbe sur S . C'est à dire

- Une décomposition en pantalon constituée de $3g - 3$ courbes simples $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{3g-3}\}$
- Un ensemble de coutures $\{\beta_1, \dots, \beta_{3g-3}\}$ c'est à dire une collection de courbes fermées simples disjointes telle que l'intersection de l'union $\cup \beta_i$ avec un pantalon P de la décomposition est constitué de trois arcs reliant les bords de P deux à deux.

(RQ : On peut également prendre pour plus de simplicité, dans chaque surface obtenue par le recollement de deux pantalons le long de γ_i , (c'est à dire un tore à un trou ou une sphère à quatre trous), une courbe β_i qui intersecte γ_i de façon minimale.

Un tel ensemble de couture existe toujours, il suffit de prendre les arcs correspondant dans chaque pantalon et de déformer de sorte que les coutures se recollent.

Les paramètres de longueur d'un point $(X, \phi) \in \mathcal{T}(S)$ est le $(3g - 3)$ -uplet de nombres réels positifs

$$(l_1(X), \dots, l_{3g-3}(X))$$

D'après le théorème précédent, ces longueurs déterminent le type d'isométrie de chaque pantalon P de la décomposition. Il faut maintenant obtenir des paramètres de twists pour comprendre comment ces pantalons sont recollés.

Etant donné une couture β traversant un pantalon P en γ_1 et γ_2 , on définit le nombre de twist comme suit. On prends δ l'unique arc de longueur minimale reliant γ_1 à γ_2 . (C'est un arc orthogonal aux bord aux deux extrémités. il suffit de passer dans le revêtement universel pour le voir)

On peut alors choisir un voisinage de γ_1 et γ_2 et modifier β par isotopie pour qu'elle coïncide avec δ en dehors de ce voisinage. Le nombre de twist de β sur γ_1 est alors le déplacement horizontal de l'extrémité de β sur γ_1 . Idem pour β sur γ_2 . En supposant qu'on tende β , le nombre est relativement bien défini. (ou en tout cas, globalement, les choix se compensent)

Etant donné un point (X, ϕ) de l'espace de Teichmuller, on définit le paramètre de twist $\theta_i(X)$ comme suit. Soit β_j l'une des deux couture intersectant γ_j . De chaque côté de γ_i il y a un pantalon P_j et P_k et un arc géodésique homotope à $\phi(\beta_j)$. Soit t et t' les nombres de twists de β_j en γ_j pour l'un ou l'autre des pantalons. On considère alors

$$\theta_i(X) = (t - t') \frac{2\pi}{l_X(\gamma_i)}$$

Il faut montrer que ce paramètre ne dépend pas du choix de la couture β_j choisie. (Voir Farb-Margalit 10.6.1)

Théorème 2 .11 Soit $g \geq 2$ et un système de courbe sur S la surface fermée de genre g . L'application

$$FN : \mathcal{T}(S) \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}^{3g-3} \times \mathbb{R}^{3g-3}$$

$$X \longmapsto (l_1(X), \dots, l_{3g-3}(X), \theta_1(X), \dots, \theta_{3g-3}(X))$$

est un homéomorphisme.

En particulier ce théorème nous dit que l'espace de Teichmuller est topologiquement une boule de dimension $6g - 6$.

Le $6g - 6$ uplet de nombre est appelé coordonnées de Fenchel-Nielsen du point (X, ϕ) .

Démonstration : On va définir un unique point de $\mathcal{T}(S)$ à partir de coordonnées $(l_1(X), \dots, l_{3g-3}(X), \theta_1(X), \dots, \theta_{3g-3}(X))$. En 4 étapes :

- (1) On construit les pantalons hyperboliques en utilisant les paramètres de longueur.
- (2) On choisit les arcs géodésiques reliant un bord à un autre dans chaque pantalon. Et on ajuste ces coutures en utilisant le paramètre de twist.

- (3) On forme le quotient de l'union des pantalons avec le recollement de chaque composante de bord de sorte que les extrémités des coutures coïncident. Cela donne une surface hyperbolique X avec un système de courbe.
- (4) On construit un homéomorphisme $\phi : S \rightarrow X$ qui respecte l'identification des systèmes de courbes.

Etape (1) : Soit $P_{i,j,k}$ le pantalon déterminé par $\gamma_i, \gamma_j, \gamma_k$. (Non forcément distincts). Soit $X_{i,j,k}$ l'unique pantalon hyperbolique avec les longueurs donnés, avec l'homéomorphisme $P_{i,j,k} \rightarrow X_{i,j,k}$.

Etape (2) : Pour chaque $X_{i,j,k}$ et chaque paire de composante de bord, on dessine l'unique arc géodésique perpendiculaire à ces composantes de bord. Pour chaque composante de bord γ_m , on ajuste la couture en remplaçant l'arc géodésique dans un voisinage de γ_m par un arc qui fait un tour de $(\theta_m/2\pi)/l_m$. L'arc obtenu est unique à isotopie relative au bord. De cette façon, a une couture sur $P_{i,j,k}$ correspond une unique couture sur $X_{i,j,k}$.

Etape (3) : Comme les composantes de bord et les coutures des $X_{i,j,k}$ sont identifiés dans $P_{i,j,k}$ on peut former le quotient

$$X = \sqcup X_{i,j,k} / \sim$$

Les identifications des bord sont donnés par les identifications dans Σ et on s'arrange pour aligner les coutures. Cela nous donne une surface hyperbolique X

Etape (4) : On peut alors construire un difféomorphisme $\phi : \Sigma \rightarrow X$ qui respecte le système de courbes.

Les deux constructions sont bien l'inverse l'une de l'autre, et les deux applications sont continues, donc c'est bien un homéomorphisme.

□

E . Canonicité des coordonnées

Les coordonnées de Fenchel-Nielsen n'ont rien de canonique. Elle dépendent grandement d'un choix de système de courbe. Cependant on a la propriété remarquable

Théorème 2.12 La 2-forme définie sur $\mathcal{T}(S)$ par

$$\omega = \sum_{i=1}^{3g-3} dl_i \wedge d\theta_i$$

est indépendante du système de courbe choisie. Elle correspond exactement à la forme symplectique de Weil-Petersson ou encore à la forme symplectique de Goldman.

La démonstration de ce théorème (dû à Wolpert) est hors du domaine de ce cours mais cela montre que ces coordonnées sont relativement canonique. En changeant de décomposition on ne change pas la structure symplectique.

F . Surfaces non fermées

On peut facilement étendre le théorème au cas des surfaces non fermées. SI la surface est compacte, on a bien une décomposition en pantalon. Certains pantalons ont comme bord, un bord de la surface. Pour ces courbes là, il n'y a pas besoin de paramètre de twist (prendre l'exemple du pantalon lui-même par exemple). Pour les piqûres, on n'a même pas besoin d'information sur le bord. On peut voir l'espace de Teichmüller d'une sphere à trois pointes qui est trivial.

On a donc un homéomorphisme :

$$\mathcal{T}(\Sigma_{g,b,p}) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}^{3g+2b+p-3} \times \mathbb{R}^{3g+b+p-3}$$

IV . Décomposition fine-épaisse

Dans cette partie on considère la structure d'une surface hyperbolique en essayant de comprendre ce qu'il se passe quand une des courbes de la décomposition devient petite. Pour commencer, on montre le Lemme dit "du collier" qui exhibe des cylindres plongés dans la surface.

A . Lemme du collier

Lemme 2 .4 Soit γ une géodésique fermée simple sur $X \in \mathcal{T}(\Sigma)$. Alors l'ensemble

$$N_\gamma = \{x \in X, d(x, \gamma) \leq \omega\}$$

est un cylindre plongé dans X où on a posé

$$\omega = \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\sinh \left(\frac{l(\gamma)}{2} \right)} \right)$$

On va même voir dans la démonstration qu'on a un résultat un peu plus fort. Ce théorème nous dit que quelle que soit la géodésique γ , une courbe qui croise γ ne peut pas être trop petite puisqu'elle doit traverser le cylindre. De plus, si la longueur de γ devient petite alors la longueur du cylindre devient grande, on ne peut donc pas avoir deux courbes de longueur "petite" qui s'intersectent.

Démonstration : Soit γ une courbe de X . On choisit une décomposition en pantalon contenant γ et un pantalon P de cette décomposition ayant γ comme composante de bord.

Le pantalon P est muni d'une structure hyperbolique, et on l'identifie avec l'hexagone à angle droit obtenu en coupant P le long des arcs orthogonaux. On a donc un hexagone avec les longueurs des côtés c_1, c_2, c_3 où $c_1 = \frac{1}{2}l(\gamma)$. On note également d_1, d_2, d_3 les côtés opposés aux côtés donnés.

On va montrer que dans l'hexagone, les voisinages des courbes c_i sont tous disjoints. Ainsi, en recollant on obtiendra des cylindres disjoints (pas de possibilités de chevauchement).

Soit α l'arc orthogonal à c_3 et d_3 . En coupant l'hexagone le long de α on obtient deux pentagones à angle droits, dont l'un contient c_1 . On note x et y les longueurs des côtés de ce pentagone adjacent à α , avec x le côté adjacent à c_1 .

Dans un pentagone à angle droits, on a l'identité suivante

$$\sinh(x) \sinh(c_1) = \cosh(y)$$

Comme le $\cosh(y) > 1$ on en déduit que

$$x > \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\sinh(c_1)} \right)$$

Le ω -voisinage de c_1 dans l'hexagone est donc inclus dans le pentagone à angles droits construit. Par symétrie de la figure, on en déduit que les voisinages de chacun des côtés sont inclus dans des pentagones disjoints, ce qui termine la preuve

□

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 2 .1 Si $i(\alpha, \gamma) \geq 1$ alors

$$l(\alpha) \geq i(\alpha, \gamma)\omega$$

Ou encore le corollaire suivant :

Corollaire 2 .2 Soit Σ une surface. Il existe $\delta = \delta(\Sigma)$ tel que si $X \in \mathcal{T}(\Sigma)$ alors deux géodésiques différentes de longueur inférieure à δ sont simples et disjointes.

B . Rayon d'injectivité

Soit $X \in \mathcal{T}(\Sigma)$, et $x \in X$. Le rayon d'injectivité au point x est

$$R_x(X) = \max\{r \in \mathbb{R}, \text{ l'ensemble } B_r(x) \text{ est isométrique à un disque ouvert de } \mathbb{H}\}$$

De façon équivalente, le rayon d'injectivité au point x est la moitié de l'infimum des longueurs de courbes fermées contenant x .

Lorsque la surface est d'aire finie, on peut définir le rayon d'injectivité maximal de la surface comme étant le maximum des rayons d'injectivité. C'est à dire le plus grand disque plongé maximal.

On peut montrer que le rayon d'injectivité maximal est supérieur à une constante universelle en utilisant le lemme du collier

Proposition 2 .14 Il existe une constante universelle $r_0 > 0$ telle que pour toute surface hyperbolique X , il y a un disque hyperbolique de rayon $r > r_0$ plongé dans X

Démonstration : Dans le cas contraire, il existe un lacet géodésique simple α arbitrairement court sur X . Mais dans ce cas, on peut trouver un cylindre plongé, et dans ce cylindre on peut trouver des disques arbitrairement grand.

□

C . Partie fine

La définition précédente nous permet de décomposer toute surface hyperbolique en une partie fine et une partie épaisse

On note

$$X_{<\varepsilon} = \{x \in X, r_x(X) < \varepsilon\}, \quad X_{\geq\varepsilon} = \{x \in X, r_x(X) \geq \varepsilon\}$$

Théorème 2 .13 (Décomposition fine-épaisse) Soit X une surface hyperbolique (sans bord). Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute composante connexe de la partie ε -fine de X soit :

- le voisinage d'une géodésique fermée simple de longueur $< 2\varepsilon$.
- Le voisinage d'un cusp.
- (Une composante de bord)

Démonstration : A faire ?

□