3 . Groupe Modulaire

Le groupe modulaire (classique) est le groupe $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$. Il correspond au groupe d'homéomorphismes directs du tore modulo isotopie. On appelle la généralisation à d'autres surfaces également groupe modulaire, ou *mapping class group*.

I . Définition

A . Retour sur les homéomorphismes

Soit Σ une surface de genre g avec p piqûres et b composantes de bord.

Définition 3 .15 : On note $\mathrm{Homeo}^+(\Sigma, \partial\Sigma)$ le groupe des homéomorphismes de Σ préservant l'orientation et dont la restriction à chaque composante de bord est l'identité

On peut munir ce groupe de la topologie compacte ouverte, ce qui munit le groupe d'une structure de groupe topologique. Cela nous permet de définir le groupe des composantes connexes de la surface.

Définition 3 .16 : Le Groupe Modulaire de Σ, noté $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ est le groupe $\pi_0(\mathrm{Homeo}^+(\Sigma, \partial\Sigma))$.

De façon équivalente c'est le quotient de $\mathrm{Homeo}^+(\Sigma, \partial\Sigma)$ par le sous-groupe normal $\mathrm{Homeo}_0(\Sigma, \partial\Sigma)$ des homéomorphismes dans la composante connexe de l'identité.

Les composantes connexes sont exactement les classes d'isotopies. Il peut être bon de rappeler les faits suivants (pour des démonstrations, voir Farb-Margalit)

Proposition 3 .15 Soit Σ une surface avec $\chi(S) \leq 0$

(1) Si f, g sont deux homéomorphismes préservant l'orientation qui sont homotopes, alors ils sont isotopes. (Si ça ne préserve pas l'orientation, il y a un nombre fini de cas pathologiques ...)

(2) Tout homéomorphisme de Σ est isotope à un difféomorphisme

(3) La composante $\mathrm{Homeo}_0(\Sigma, \partial\Sigma)$ est contractile.

Cette proposition nous dit qu'on peut prendre les classes d'isotopie/homotopie de difféo/homéo et cela donne le même objet qui est le groupe modulaire.

Dans cette définition, les composantes de bord sont fixes mais les piqûres peuvent être échangées. On notera $P\mathrm{Mod}(\Sigma)$ le sous-groupe de $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ ne contenant que les éléments fixant les piqûres.

Dans le chapitre 5, nous ne nous intéresserons qu'aux surfaces compactes (sans piqûres) et donc le groupe modulaire pur sera égal au groupe modulaire.

B . Calcul de certains Groupes modulaires

On commence par donner la structure de quelques Groupes modulaires simples.

Lemme 3 .5 (Alexander) Si D est un disque fermé, alors Mod(D) est trivial

Démonstration : On peut identifier D avec le disque unité. Soit alors $\phi : D \to D$ un homéomorphisme avec $\phi_{\partial D} = \mathrm{Id}$. On définit

$$F(x,t) = \begin{cases} (1-t)\phi\left(\frac{x}{1-t}\right) & 0 \leq |x| < 1-t \\ x & 1-t \leq |x| < 1 \end{cases}$$

et $F(x,1) = \mathrm{Id}$.

On peut vérifier que cela donne bien une isotopie de ϕ à Id.

□

Remarque : Cette preuve marche en fait en toute dimension avec des homéomorphismes. Mais attention, elle ne marche pas avec des difféomorphismes ! En fait, l'équivalence homéo/difféo est un problème non trivial. Par exemple en dimension 7, Milnor a construit des structures différentiables non difféomorphes sur la sphère (donc un objet différentiable peut être homéomorphe à une sphère sans être difféomorphe à la sphère). En dimension 4, on ne sait toujours pas si c'est vrai ou non (conjecture de Poincaré differentiable).

Lemme 3 .6 Le disque privé d'un point, la sphère et la sphère privée d'un point ont des groupes modulaires triviaux

Démonstration :

- Pour le disque privé d'un point, on utilise exactement le même raisonnement que précédemment.
- La sphère privée d'un point est homéomorphe au plan. Et dans le plan on peut utiliser l'homotopie en ligne droite. C'est à dire que si on prends $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, on note
$$H(x,t) = (1-t)\phi(x) + tx$$
et cela donne bien une homotopie entre ϕ et l'identité.
- Pour la sphère, un homéo fixe au moins un point (puisque la sphère est compacte). On peut alors considérer l'homéo induit sur la surface privée de ce point et appliquer le cas précédent.

□

On pourrait montrer sans trop de difficultés :

Proposition 3 .16 le groupe modulaire pur d'une sphère à deux ou trois piqûres est trivial.

Un exemple moins trivial et qui va beaucoup nous servir est le groupe modulaire d'un cylindre C, c'est à dire une surface de genre 0 avec deux bords.

Proposition 3 .17 Soit S un cylindre. Alors $\mathrm{Mod(S)} \simeq \mathbb{Z}$.

Le générateur est un twist (voir dessin)

Démonstration : On considère le cylindre $S = [0,1] \times [0,1]/\sim$ où $(0,y) \sim (1,y)$. Soit $\phi : S \to S$ représentant une classe $f \in \mathrm{Mod(S)}$.

On relève l'application au revêtement universel $\widetilde{\phi} : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R} \times [0,1]$, et on choisit le relevé qui fixe le point $(0,0)$. Alors la restriction de $\widetilde{\phi}$ à la droite $\mathbb{R} \times \{1\}$ est une translation entière. Cela nous donne un morphisme T de Mod(S) dans $\mathbb{Z}$ en considérant le vecteur de translation.

Il est clair que l'application est surjective (il suffit de construire un homéo qui fait un tour). En effet, l'application

$$\phi S \to S$$
$$(x, y) \mapsto (2x \text{ mod } 1, \text{y})$$

est envoyée sur 1 par le morphisme T précédent.

Pour montrer l'injectivité, On considère ϕ tel que $T(\phi) = 0$. On utilise l'homotopie en ligne droite dans $\mathbb{R} \times [0, 1]$ de $\widetilde{\phi}$ vers l'identité. Comme cette homotopie est $\mathbb{Z}$-équivariante, elle passe au quotient (qui est le cylindre S) et donc on a bien que ϕ est homotope à l'identité dans S.

□

C . **Exemples d'elements**

Si Σ est une surface fermée de genre g, on peut considérer l'homéomorphisme d'ordre g qui fait tourner les anses. (faire un dessin)

On peut également considérer un $(4g + 2)$-gone régulier (avec angles bien choisis) où les côtés opposés sont identifiés. On peut alors considérer l'homéomorphisme qui réalise une rotation du domaine fondamental. Cet élément est d'ordre $4g + 2$.

En fait, on peut montrer que c'est l'ordre maximal d'un élément dans le groupe modulaire (démonstration assez difficile, Nielsen realization problem)

De même on peut montrer que les sous-groupes finis de $\text{Mod}(\Sigma)$ sont d'ordre inférieur à $84(g-1)$. La démonstration n'est pas du tout triviale : Il faut d'abord utiliser un résultat sur le groupe d'isométries d'une surface hyperbolique que nous allons voir plus loin (étape relativement facile) . Puis il faut montrer qu'on peut réaliser un tel sous-groupe par un sous-groupe des Homeo, ce qui est le Nielsen realization problem (étape beaucoup plus difficile).

Les éléments d'ordre infinis sont donc beaucoup plus intéressants. En utilisant le générateur T du groupe modulaire du cylindre vu précédemment, on peut construire des éléments d'ordre infini sur n'importe quelle surface suffisamment compliquée (n'importe quelle surface possèdant une courbe fermée simple essentielle).

Définition 3 .17 : Soit γ une courbe simple sur Σ, et soit N_γ un voisinage régulier de γ, qui est homéomorphe à un cylindre par une application $\phi : S \to N_\gamma$. On définit alors le twist de Dehn (droit) comme

$$\tau_\gamma(x) = \begin{cases} hTh^{-1}(x) & x \in N_\gamma \\ x & x \neq N_\gamma \end{cases}$$

On peut comprendre l'action d'un twist de Dehn sur les courbes. Soit $\alpha \in \pi_1(\Sigma)$ et β une autre courbe. L'image de β par τ_α est β si $i(\alpha, \beta) = 0$). Sinon, on peut voir l'image de β en suivant la règle "on suit β, et quand on croise α on tourne à gauche, on suit α pendant un tour puis on tourne à droite. On peut noter que cela ne dépend pas de l'orientation choisie pour β (ou α). Faire un dessin

Ce qui est intéressant est que ces éléments sont des générateurs de $\text{Mod}(\Sigma)$. Et même mieux :

Théorème 3 .14 Le groupe $P\text{Mod}(\Sigma)$ est engendré par un nombre fini de twists de Dehn.

Démonstration : Hors programme. La démonstration passe par le complexe de courbe et en faisant une induction sur le genre.

Le complexe de courbe est le complexe dont les sommets sont les classes d'isotope de courbes fermées simples essentielles. Deux sommets sont reliés par une arête si ils sont d'intersection minimale (c'est à dire 0 dans la plupart des surfaces, sauf pour tore à un trou et sphere a quatre trous). L'important ici est que ce graphe est connexe.

Pour une démonstration, voir Farb-Margalit.

□

On a un troisième type d'élément dans $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ qui sont aussi d'ordre infini mais qui sont beaucoup plus compliqués à décrire que les twists de Dehn. Ce sont les pseudo-Anosov.

Donnons un exemple. Supposons qu'on a deux courbes simples α et β qui *remplissent* la surface, au sens ou le complémentaire $\Sigma \setminus \{\alpha, \beta\}$ est une union disjointe de disque topologique. L'élément $\tau_\alpha \circ \tau_\beta$ est un pseudo-Anosov. On peut montrer qu'aucune courbe fermée n'est laissée invariante par cet élément ou par une de ses puissances.

D . Méthode d'Alexander

On dit qu'une famille $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ de courbes fermées simples *remplit* Σ si la surface $\Sigma \setminus \cup\alpha_n$ est une union disjointe de disques ouverts (topologiques).

En pratique on peut toujours trouver une telle famille de courbe (dessin). On peut même trouver des familles à seulement deux éléments qui remplissent la surface (dessin).

En effet, si on choisit une décomposition en pantalon généralisée de Σ. On peut choisir β sur Σ qui intersecte chaque courbe de la décomposition au moins une fois. En recollant les arcs transverses au pantalon, on peut construire le truc. En suite, si on applique le twist de Dehn $T_{\alpha_1} \circ T_{\alpha_n}$ à β, on obtient la deuxième courbe voulue.

Proposition 3 .18 Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ remplissant la surface. Et soient $\beta_1, \ldots, \beta_n$ des courbes. L'ensemble des éléments ϕ du groupe modulaire tel que $\phi(\alpha_i) = \beta_i$ pour tout i, est fini.

Démonstration : (On donne juste l'idée, voir Farb-Margalit pour une preuve détaillée)

Soit $\Gamma = \alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_k$. Et soit ϕ et ψ qui sont tels que $\phi(\Gamma)$ est isotope à $\psi(\Gamma)$. On va montrer que $[\sigma] = [\phi \circ \psi^{-1}]$ est un élément d'ordre fini dans $\mathrm{Mod}(\Sigma)$.

En considérant $\Gamma = \alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_k$ comme un graphe sur Σ, on voit que l'homéomorphisme σ envoie Γ sur un graphe $\sigma(\Gamma)$ qui lui est isomorphe. On peut se ramener par isotopie à considérer que Γ est fixe. En dehors de ce graphe, les composantes du complémentaire de Γ sont envoyées sur les composantes du complémentaire de $\phi(\Gamma)$. D'après le lemme d'Alexander, les homéomorphismes entre deux composantes sont tous isotopes. On en déduit donc que la seule chose non isotopiquement triviale que peut faire σ est d'échanger certains disques entre eux, ce qui revient à faire une permutation. On en déduit que l'élément est d'ordre fini.

□

II . Dehn-Nielsen-Baer

A . Automorphismes extérieurs

Le groupe modulaire étendu $\mathrm{Mod}^{\pm}(\Sigma)$ inclut les homéomorphismes qui renversent l'orientation de Σ. C'est au plus une extension de degré 2 de $\mathrm{Mod}(\Sigma)$. On peut noter que si Σ a du bord, alors $\mathrm{Mod}(\Sigma) = \mathrm{Mod}^{\pm}(\Sigma)$ car l'orientation sur le bord induit une orientation sur l'intérieur de la surface.

On note $\mathrm{Aut}(\pi)$ le groupe des automorphismes de π et $\mathrm{Inn}(\pi)$ le sous-groupe des automorphismes intérieurs. C'est un sous-groupe normal et le quotient :

$$\mathrm{Out}(\pi) = \mathrm{Aut}(\pi)/\mathrm{Inn}(\pi)$$

est appelé le groupe des automorphismes extérieurs de π. Un élément de ce groupe agit naturellement sur $[\pi]$ l'ensemble des classes de conjugaison dans π.

Soit Σ une surface et $p \in \Sigma$. Soit $\phi : \Sigma \to \Sigma$ un homéo et γ un chemin liant p à $\phi(p)$.

On obtient alors une application :

$$\begin{aligned} \phi_* : \pi_1(\Sigma, p) &\longrightarrow \pi_1(\Sigma, p) \\ [\alpha] &\longmapsto [\gamma * \phi(\alpha) * \gamma^{-1}] \end{aligned}$$

En résumé on compose l'action de ϕ de $\pi_1(\Sigma, p)$ dans $\pi_1(\Sigma, \phi(p))$ avec un isomorphisme entre les deux groupes utilisant γ.

Le choix de γ ou de p change cette application par une conjugaison (c'est à dire par l'action d'un élément de $\mathrm{Inn}(\pi_1(\Sigma, \mathrm{p}))$. L'application ϕ_* est un automorphisme. On a donc une application $\phi \mapsto \phi_*$ qui induit une application

$$\mathrm{Mod}^{\pm}(\Sigma) \to \mathrm{Out}(\pi_1(\Sigma))$$

En effet, pour un choix de ϕ' isotope à ϕ, il est clair que l'action sur le π_1 est la même. Cette application est un morphisme de groupe injectif.

Théorème 3 .15 (Dehn-Nielsen-Baer) Si Σ est une surface fermée, alors l'application précédente est un isomorphisme de groupe

Démonstration : Admis. Voir Farb-Margalit.

□

Pour les surfaces non fermées, le résultat est faux. En effet, un élément de $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ va préserver la structure périphérique du bord (puisque chaque composante de bord est envoyée sur elle-même.

La structure périphérique (orientée) est l'ensemble des $b+p$ classes de conjugaison correspondant aux boucles autour de chaque composante de bord, ou chaque piqûre. Un élément du mapping class group préserve la structure périphérique, si ces classes de conjugaison sont toutes préservées par l'élément.

Théorème 3 .16 SI S est une surface à bord, avec $\chi(\Sigma) < 0$ alors l'homéomorphisme $\mathrm{Mod}(\Sigma) \to \mathrm{Out}(\pi_1(\Sigma))$ est un isomorphisme sur le sous-groupe des éléments préservant la structure périphérique.

B . Expression de certains éléments

Ce qui peut être intéressant est de comprendre l'action algébrique de certains homéomorphismes.

Par exemple, l'élément d'ordre g qui nous avons vu précédemment a une expression très simple. Si on note

$$\pi_1(\Sigma) = \langle a_1, \ldots, b_g | [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] \rangle$$

On a l'automorphisme suivant $\sigma(a_i) = a_{i+1}$ et $\sigma(b_i) = b_{i+1}$. Cela nous donne bien un automorphisme de $\pi_1(\Sigma)$ (à vérifier) et il est bien d'ordre g.

Soit γ une courbe simple. On veut pouvoir déterminer algébriquement le twist de Dehn selon γ. il faut distinguer deux cas selon que la courbe est séparante ou non-séparante.

Courbe séparante : On dit que γ est séparante si $\Sigma \setminus \gamma$ est constitué de deux composantes connexes, notée Σ_1 et Σ_2. Le groupe fondamental de Σ est obtenu par un produit amalgamé de $\pi_1(\Sigma_1)$ et $\pi_1(\Sigma_2)$ le long du sous-groupe engendré par γ dans chaque groupe.

$$\pi_1(\Sigma) = \pi_1(\Sigma_1) *_{\langle\gamma\rangle} \pi_1(\Sigma_2)$$

On rappelle que le produit amalgamé est défini comme le quotient du produit libre par le sous-groupe normal engendré par les relation $\phi(\gamma) = \psi(\gamma)$.

Le twist de Dehn a alors un représentant dans $\mathrm{Aut}(\pi_1(\Sigma))$ défini par :

$$\tau_\gamma(\alpha) = \begin{cases} \alpha & \alpha \in \pi_1(\Sigma_1) \\ \gamma\alpha\gamma^{-1} & \alpha \in \pi_1(\Sigma_2) \end{cases}$$

Donnons un exemple dans le cas de la surface fermée de genre 2. On a

$$\pi_1(\Sigma) = \langle A, B, C, D \mid [A, B][C, D] = 1\rangle$$

Le twist de Dehn τ_A est représenté par l'élement (aussi noté τ_A)

$$\tau_A : \begin{array}{ccc} A & \mapsto & A \\ B & \mapsto & AB \\ C & \to & C \\ D & \to & D \end{array}$$

Courbe non-séparante : Le groupe fondamental est obtenu par une extension HNN du groupe fondamental de Σ'.

On rappelle que si $\pi_1(\Sigma') = \langle A_1, \ldots, B_g, C_1, \ldots, C_k, \gamma_+, \gamma_- | R\rangle$, avec R la relation standard de la surface. On a l'isomorphisme canonique $\langle\gamma_+\rangle \to \langle\gamma_-\rangle$ alors l'extension HNN est donnée par

$$\pi_1(\Sigma) = \langle A_1, \ldots, B_g, C_1, \ldots, C_k, \gamma_+, \gamma_-, T | R, T\gamma_+T^{-1} = \gamma_-\rangle$$

Faire un dessin. On a alors l'expression suivante pour le twist de Dehn :

$$\tau_\gamma(\alpha) = \begin{cases} \alpha & \alpha \in \pi_1(\Sigma') \\ \gamma\alpha & \alpha = t \end{cases}$$

Donnons un exemple dans le cas de la surface fermée de genre 2. On a

$$\pi_1(\Sigma) = \langle A, B, C, D \mid [A, B][C, D] = 1\rangle$$

On note $K = [A, B]$ la courbe séparante. Le twist de Dehn τ_K est représenté par l'élement (aussi noté τ_A)

$$\tau_A : \begin{array}{ccc} A & \to & A \\ B & \to & B \\ C & \to & KCK^{-1} \\ D & \to & KDK^{-1} \end{array}$$

III . Action sur l'espace de Teichmuller

A . Définition de l'action

Définition 3 .18 : Le groupe modulaire agit sur l'espace de Teichmuller. Soit $[\psi] \in \mathrm{Mod}(\Sigma)$ et $[(X, f)] \in \mathcal{T}(\Sigma)$, alors on définit

$$[\psi] \cdot [(X, f)] = [X, f \circ \psi^{-1}]$$

Cette action est bien définie et ne dépend pas du représentant choisi.

L'orbite d'un point $[(X, f)]$ sous l'action du groupe modulaire est l'ensemble des $[(X, \phi)]$ où ϕ parcourt l'ensemble des classes d'homotopie de marquage.

Du point de vue algébrique on peut utiliser le théorème de Dehn-Nielsen-Baer pour identifier $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ avec un sous-groupe de $\mathrm{Out}(\pi_1(\Sigma))$. On a une action naturelle par précomposition de $\mathrm{Aut}(\pi)$ sur $\mathrm{Hom}(\pi, G)$ qui passe au quotient par conjugaison par G. L'action des automorphismes intérieur est triviale sur le quotient, et on a donc une action bien définie de $\mathrm{Out}(\pi)$ sur $\mathrm{Hom}(\pi, G)/G$. (Cette action est très générale). De façon explicite Si $[\sigma] \in \mathrm{Out}(\pi)$ et $[\rho] \in \mathcal{T}(\Sigma)$ alors

$$[\sigma] \cdot [\rho] = [\rho \circ \sigma^{-1}]$$

Remarque : Avec ce point de vue on en déduit qu'un élément ϕ de $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ agit trivialement sur $\mathcal{T}(\Sigma)$ si et seulement si ϕ fixe la classe d'isotopie de chaque courbe essentielle (simple) sur Σ. En effet, on voit que ϕ fixe la longueur de chaque courbe. Or on peut trouver une structure hyperbolique ou les classes d'isotope différentes ont des longueurs différentes.

En général un tel élément de $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ qui agit trivialement sur $\mathcal{T}(\Sigma)$ est trivial, sauf dans un nombre fini de cas particulier (c'est ce qu'on appelle les surfaces hyperelliptiques).Une étude plus générale montre que si Σ n'est pas un tore à un ou deux trous, une surface de genre deux, ou une sphère à quatre trous, alors l'action est fidèle.

Dans les cas particuliers hyperelliptiques, le noyau de l'action est d'ordre 2 engendré par l'involution hyperelliptique ou d'ordre 4 dans le cas de la sphère à quatre trous.

B . Théorème d'Hurwitz

On se pose la question des stabilisateurs des points de $\mathcal{T}(\Sigma)$.

Soit $\tau \in \mathrm{Mod}(\Sigma)$ représenté par ψ. On suppose que τ stabilise $[(X, \phi)]$. Alors les surfaces (X, ϕ) et $(X, \phi \circ \psi^{-1})$ sont équivalentes, c'est à dire que $\phi \circ \psi \circ \phi^{-1} : X \to X$ est isotope à une isométrie de X. Cette isométrie est bien définie puisque deux isométries différentes d'une surface hyperbolique ne peuvent pas être isotopes. Cela nous donne une correspondance entre le stabilisateur d'un point $[(X, \phi)]$ et le groupe $\mathrm{Isom}^+(\mathrm{X})$.

Le théorème suivant nous dit que ces stabilisateurs sont finis et uniformément bornés.

Théorème 3 .17 Soit X une surface hyperbolique fermée de genre $g \geq 2$. Alors

$$|\mathrm{Isom}^+(\mathrm{X})| \leq 84(\mathrm{g} - 1)$$

Démonstration : On considère la représentation d'holonomie $\rho : \pi_1(\Sigma) \to \Gamma$ avec Γ un groupe fuchsien sans torsion de sorte que $X = \mathbb{H}/\Gamma$.

On définit le normalisateur $N(\Gamma)$ de Γ dans $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ par

$$N(\Gamma) = \{\gamma \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}) \mid \gamma\Gamma\gamma^{-1} \in \Gamma\}$$

Ce normalisateur est également un groupe fuchsien, mais peut avoir de la torsion. En effet, dans le groupe Γ, on peut considérer les axes dans $\mathbb{H}^2$ de tous les éléments non périphérique du groupe fondamental. Cela forme un ensemble discret dans l'ensemble des géodésique de $\mathbb{H}^2$. Si $g \in N(\Gamma)$, alors pour tout $\gamma \in \Gamma$, $g\gamma g^{-1} \in \Gamma$. Donc l'image par g de l'axe de γ est un autre axe d'un élément de γ. il est donc clair que g est en dehors d'un compact autour de l'identité.

On voit directement que :

$$\mathrm{Isom}^+(\mathrm{X}) = \mathrm{N}(\Gamma)/\Gamma$$

On en déduit que le quotient

$$\mathbb{H}/N(\Gamma) = M$$

est une orbifold hyperbolique et que la projection naturelle $X \to M$ est un revêtement branché d'indice $[N(\Gamma) : \Gamma]$. En considérant les aires, on en déduit

$$[N(\Gamma) : \Gamma] = \mathcal{A}(X)/\mathcal{A}(M)$$

Ce qui nous dit que l'indice $[N(\Gamma) : \Gamma]$ est fini.

Maintenant il suffit d'utiliser le résultat (vu au premier semestre) que toute orbifold hyperbolique est d'aire supérieure à $\frac{\pi}{21}$. (La borne est réalisée pour le groupe triangulaire $(2, 3, 7)$). Comme l'aire de X est donnée par $2\pi\chi(X) = 4\pi(g-1)$. On voit alors immédiatement que

$$|\mathrm{Isom}(\mathrm{X})| = [\mathrm{N}(\Gamma) : \Gamma] \leq \frac{4\pi(\mathrm{g}-1)}{\pi/21} \leq 84(\mathrm{g}-1)$$

□

Remarque : Comme vu précédemment, ce théorème admet une réciproque remarquable : Le problème de Réalisation de Nielsen (prouvée par Kerckhoff en 1983) qui dit que tout sous-groupe fini de $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ fixe un point de l'espace $\mathcal{T}(\Sigma)$.

C . L'action est proprement discontinue

Théorème 3 .18 L'action de $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ sur $\mathcal{T}(\Sigma)$ est proprement discontinue

Démonstration : Soit $K \subset \mathcal{T}(\Sigma)$ un compact de l'espace de Teichmuller. On va supposer par l'absurde qu'il existe une suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments distincts de $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \psi_n(K) \cap K \neq \emptyset$$

En particulier, il existe une suite $(X_n, f_n) \in \mathcal{T}(\Sigma)$ tels que $\psi_n(X_n) \in K$.

On considère α, β deux courbes qui remplissent Σ. Par continuité des fonctions longueurs,

$$\exists R > 0, \forall X \in K, l_\alpha(X) + l_\beta(X) \leq R$$

Etape 1 : Montrons d'abord qu'une des deux suites $\left(\psi_n^{-1}(\alpha)\right)_n$ et $\left(\psi_n^{-1}(\beta)\right)_n$ possède une sous-suite constituée d'éléments distincts. En effet, supposons qu'on ne peut pas trouver de telle sous-suite. Donc il existe α' et β' telle que $\psi_n^{-1}(\alpha) = \alpha'$ et $\psi_n^{-1}(\beta) = \beta'$ pour une infinité d'indice. Quitte à passer à une sous-suite on peut supposer que c'est vrai pour tout n. Il existe un élément ϕ de $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ bien choisi, tel que $\phi \circ \psi_n^{-1}(\alpha) = \alpha$ et $\phi \circ \psi_n^{-1}(\beta) = \beta$.

Les deux courbes remplissent la surface, donc elles découpent la surface en un nombre fini de disques. Par le lemme d'Alexander, l'action de $\phi \circ \psi_n$ sur chaque disque est isotope à l'identité, et donc ψ_n agit comme une permutation des différents disques. On en déduit qu'il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour les éléments $\phi \circ \psi_n$ et donc on a une contradiction.

Posons donc $\alpha_n = \psi_n^{-1}(\alpha)$ la suite infinie de courbes distinctes.

Etape 2 : On montre qu'il existe une décomposition en pantalon $\mathcal{P}$ de S telle que $i(\alpha_n, \gamma) \to \infty$ pour un certain $\gamma \in \mathcal{P}$.

Choisissons une décomposition $\mathcal{Q}$ arbitraire et supposons que pour toute courbe $\gamma \in \mathcal{Q}$, le nombre d'intersection $i(\alpha_n, \gamma)$ est uniformément borné. Donc le nombre d'arcs de α_n dans le complémentaire de $\mathbb{Q}$ est lui aussi borné (indépendamment de n).

Quitte à prendre une sous-suite, on en déduit qu'il existe une courbe simple α' et une suite d'éléments T_n dans le sous-groupe engendré par les twists de Dehn par rapport aux courbes de $\mathcal{Q}$ tel que $\alpha_n = T_n(\alpha')$. En effet, comme il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour le nombre d'arc et les arcs dans le complémentaire de $\mathcal{Q}$ on a une sous-suite d'éléments qui envoie l'ensemble des arcs sur lui-même.

Les courbes α_n étant distinctes, on en déduit que les T_n sont également distincts. De plus, il n'y a qu'un nombre fini de courbes dans $\mathcal{Q}$, donc quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que chacun des T_n est supporté par une multicourbe contenant un certain $\gamma' \in \mathcal{Q}$. On considère alors une décomposition en pantalon obtenue en faisant un flip de la courbe γ' en une courbe γ. En prenant $\mathcal{P} = (\mathcal{Q} \setminus \gamma') \cup \gamma$ on obtient le résultat voulu.

Conclusion Pour tout $X \in K$, la longueur de la courbe γ est bornée inférieurement par une constante $l > 0$ (puisque K est compact). On en déduit qu'il existe une constante ε tel que le ε-voisinage de la courbe γ est un collier plongé. On en déduit que :

$$l_{\alpha_n}(X_n) \geq \varepsilon i(\alpha_n, \gamma) \to \infty$$

Et on a donc une contradiction.

□

D . Action sur les autres composantes de la variété des caractères

Hors programme.

L'action de $\mathrm{Out}(\pi)$ sur les autres composantes connexes de la variété des caractères $\mathrm{Hom}(\pi, G)/G$ est mystérieuse. Goldman a conjecturé que l'action était ergodique sur les composantes non Teichmuller (c'est à dire, à l'opposé d'une action proprement discontinue).

E . Spectre des longueurs

On définit le spectre des longueurs d'une surface hyperbolique X comme l'ensemble des longueurs de toutes les géodésiques fermées simples.

$$rls(X) = \{l_X(\gamma), \gamma \in \mathcal{S}\}$$

Proposition 3 .19 Soit X une surface hyperbolique fermée quelconque et $L \in R$. L'ensemble

$$\{\gamma, l_X(\gamma) < L\}$$

est fini. En particulier le spectre est discret

Démonstration : Soit K un domaine fondamental compact dans $\mathbb{H}$. Toute géodésique fermée simple a un relevé $\tilde{\gamma}$ qui intersecte K. Cela nous donne un élément particulier de $\pi_1(X)$ dans la classe d'isotope de γ et tel que $\rho(\gamma)$ agit sur $\tilde{\gamma}$ par translation de longueur $l_X(\gamma)$.

Soit $L > 0$, et supposons que γ est de longueur inférieure à L. Chaque point de $\tilde{\gamma} \cap K$ est déplacé d'une distance de $l_X(\gamma)$. Si on considère K_L le L-voisinage de K. C'est encore un compact et $(\gamma_0 \cdot K_R) \cap K_R \neq \emptyset$. Comme l'action de $\pi_1(X)$ sur $\mathbb{H}$ est proprement discontinue, on en déduit qu'il n'y a qu'un nombre fini d'éléments γ_0 satisfaisant la condition.

□

Un élément du mapping class group préserve le spectre des longueurs. En effet, le spectre ne dépend pas du marquage, mais uniquement de la surface hyperbolique X.

On peut définir la systôle d'une surface hyperbolique comme étant la longueur de la plus petite géodésique fermée simple. La systole définit une fonction sur $\mathcal{T}(\Sigma)$ qui est invariante par l'action du groupe modulaire.

F . Espace de module

Définition 3 .19 : L'espace de modules est le quotient de $\mathcal{T}(\Sigma)$ par l'action de $\mathrm{Mod}(\Sigma)$. C'est l'espace de module des surfaces hyperboliques à isométrie près. (pas de marquage).

Cet espace de module hérite d'une topologie naturelle par le quotient, et même de métrique naturelle (via la métrique de Teichmuller). Ce n'est pas une variété puisque certains points ont des stabilisateurs non-triviaux. Mais c'est quand même une orbiété.

Par exemple l'espace de Teichmuller du tore (défini avec les structures plates et non hyperboliques, mais sinon tout pareil) est identifié avec $\mathbb{H}$. Et le groupe modulaire du tore est isomorphe à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$. L'action de Mod(T) sur $\mathbb{H}$ est exactement l'action par homographie. Donc l'espace de module du tore est exactement la surface modulaire $(2, 3, \infty)$.

Ca a donc du sens de parler du volume de l'espace de Module. Un des résultats importants obtenus par Mirzakhani (qui lui ont en partie valu la médaille Fields) est le calcul explicite de ce volume, via une idée très hyperbolique sur les longueurs des géodésiques fermées simples. On ne parlera pas plus de l'espace de module ici.