4 . Compactification de l'espace de Teichmuller

On va construire dans ce chapitre une compactification de l'espace de Teichmuller $\mathcal{T}(\Sigma)$. En d'autres termes on va essayer de comprendre comment une suite d'éléments de $\mathcal{T}(\Sigma)$ peut diverger, et si on peut associer un objet à la "limite" de cette suite d'élément.

On peut imaginer plusieurs possibilités pour obtenir une suite divergente dans $\mathcal{T}(\Sigma)$: On peut pincer une courbe jusqu'à la rendre de longueur "nulle". On peut faire agir des éléments du groupe modulaire de plus en plus grand (par exemple en augmentant un paramètre de twist), ou une combinaison des deux.

L'idée de la compactification de Thurston est la suivante. On note $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\Sigma$ l'ensemble des classes d'isotopie de courbes fermées simples sur Σ. Et on considère $\mathbb{R}^{\mathcal{S}}_{>0}$ l'ensemble des fonctions sur $\mathcal{S}$ à valeurs positives. On a un plongement de $\mathcal{T}(\Sigma)$ dans $P\mathbb{R}^{\mathcal{S}}_{>0}$ donné par la projectivisation des fonctions longueurs. L'image de cette application est précompact. On peut donc considérer sa fermeture qui est compacte et ainsi lui associer un bord naturellement.

L'idée est ensuite de comprendre ces points de bord comme des objets géométriques sur la surface. Dans ce cours on identifiera ces points à des laminations géodésiques mesurées (il y a d'autres points de vue par les feuilletages mesurés, les courants géodésiques, etc ...)

I . Plongement de Fricke-Klein (9g-9)

On commence par montrer qu'on peut plonger $\mathcal{T}(\Sigma)$ dans $P\mathbb{R}^{\mathcal{S}}_{>0}$.

On a l'application suivante

$$\begin{aligned} l_* : \mathcal{T}(\Sigma) &\to \mathbb{R}^{\mathcal{S}} \\ [X,f] &\mapsto \{l_X(\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{S}} \end{aligned}$$

On rappelle que $l_X(\alpha)$ est la longueur de l'unique géodésique dans la classe d'isotope de $\alpha \in \mathcal{S}$.

Le résultat principal de cette section est :

Théorème 4 .19 il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_{9g-9} \in \mathcal{S}$ telle que l'application

$$l_* : \mathcal{T}(\Sigma) \to \mathbb{R}^{9g-9}$$

est un plongement propre. L'application $l_* : \mathcal{T}(\Sigma) \to \mathbb{R}^{\mathcal{S}}$ est donc également un plongement propre.

La preuve de ce théorème passe par les coordonnées de Fenchel-Nielsen qui sont représentées par $3g-3$ paramètres de longueurs et $3g-3$ paramètres de twists. Le but est de montrer qu'on peut retrouver un paramètre de twist à partir des valeurs des longueurs de deux courbes simples. Pour cela nous allons devoir montrer un résultat de convexité sur les fonctions longueurs. Une méthode originale pour montrer cela est d'utiliser un résultat de Kerckhoff.

A . Convexité des fonctions longueurs

Soit $\{\alpha_i, \beta_j\}$ un système de courbes sur Σ. On note $FN : \mathcal{T}(\Sigma) \to \mathbb{R}^{3g-3}_{>0} \times \mathbb{R}^{3g-3}$ l'application qui associe les coordonnées de Fenchel-Nielsen correspondant à ce système de courbe.

Soit α l'une des courbes de la décomposition en pantalons par exemple $\alpha = \alpha_1$. On définit une famille à un paramètre dans l'espace de Teichmuller en fixant toutes les longueurs l_i pour $i \geq 1$ et les paramètres de twists θ_j pour $j \geq 2$ et en ne faisant varier que le premier paramètre de twist.

C'est à dire qu'on considère $X_t = FN^{-1}(l_1, \dots, l_{3g-3}, t, \theta_2, \dots, \theta_{3g-3})$.

Proposition 4 .20 Soit β une courbe telle que $i(\alpha,\beta) > 0$. Alors l'application

$$t \longmapsto l_{X_t}(\beta)$$

est une fonction propre strictement convexe.

Démonstration : Soit β une courbe fermée simple telle que $i(\alpha, \beta) = k > 0$. On suppose qu'on a pris les représentants géodésiques des courbes α et β. On définit θ_i, l'angle que fait α avec β au point d'intersection p_i, comptée dans le sens direct de α vers β. Cet angle est entre 0 et π. On va utiliser le lemme suivant (démonstration dans le paragraphe suivant) pour montrer la proposition :

Lemme 4 .7 On peut exprimer la dérivée par

$$\frac{d}{dt} l_{X_t}(\beta) = -\sum_{i=1}^{k} \cos(\theta_i(t))$$

Il est clair que les angles θ_i diminuent lorsque t augmente (faire un dessin).

Comme le cosinus est une fonction strictement décroissante, on en déduit que la dérivée de $l_{X_t}(\beta)$ est strictement croissante, ce qui montre que la fonction $t \mapsto l_{X_t}(\beta)$ est strictement convexe.

Pour montrer que la fonction est est propre, il suffit de voir que les angles $\theta_i(t)$ tendent vers 0 lorsque $t \to +\infty$ (et respectivement vers π lorsque $t \to -\infty$). Donc la valeur absolue de la dérivée est bornée inférieurement loin de 0, ce qui prouve que la fonction $l_{X_t}(\beta)$ tend bien vers l'infini lorsque t tend vers l'infini.

□

B . Formule du cosinus de Kerckhoff

Pour montrer le lemme, on a besoin de se placer dans le modèle du plan hyperbolique, dit de l'hyperboloïde. C'est à dire qu'on se place dans $\mathbb{R}^{2,1}$ muni de la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de signature $(2, 1)$.

Le plan hyperbolique est identifié avec la composante positive de l'hyperboloide

$$\mathcal{H} = \{x | \langle x, x \rangle = -1\}.$$

Dans ce modèle, on rappelle que la distance entre deux points est donnée par :

$$\cosh(d(x, y)) = -\langle x, y \rangle$$

Si γ est une géodésique paramétrée à vitesse un dans le modèle de l'hyperboloïde, alors γ est contenue dans le plan engendré par les vecteurs $\gamma(0)$ et $\gamma'(0)$, et les points sont paramétrés par les cosinus et sinus hyperboliques selon la formule suivante :

$$\gamma(r + s) = \gamma(r) \cosh(s) + \gamma'(r) \sinh(s)$$

Démonstration : On va twister d'une distance t à partir de la surface X_{t_0}. Par commodité on choisit $t_0 = 0$ (mais la démonstration est la même sinon).

Soit β_0 la géodésique paramètre à vitesse 1 dans la classe d'isotopie de β sur la surface X_{t_0}. On peut voir β_0 comme une union d'arcs géodésiques β_0^j dont les extrémités sont sur α.

On considère $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_k$ les paramètres pour lesquels $\beta_0(a_i) = p_i$ où p_i est le i-ème point d'intersection de β_0 avec α. De sorte que $l_{X_0}(\beta_0^j) = a_j - a_{j-1}$.

On effectue le twist X_t et on considère la géodésique β_t sur X_t. On paramètre β_t de sorte que $\beta_t(a_j)$ est sur α (donc β_t n'est pas paramétrée à vitesse 1).

La surface $X_t \setminus \alpha$ obtenue en coupant X_t le long de α est isométrique à la surface $X_0 \setminus \alpha$. On peut donc considérer les arcs géodésiques β_t^j comme des arcs sur la surface X_0 via cette isométrie.

Dans ce cas, $\beta_t^{j+1}(a_j)$ et $\beta_t^j(a_j)$ ne coincident pas. Par définition du twist selon la courbe α, on voit que $\beta_t^{j+1}(a_j)$ est à une distance $t\frac{l(\alpha)}{2\pi}$ de $\beta_t^j(a_j)$ le long de l'arc α.

On veut déterminer

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} l(\beta_t) = \sum_{j=1}^{k} \frac{d}{dt}_{t=0} l(\beta_t^j)$$

On relève tout dans le modèle de l'hyperboloïde de sorte que

$$\cosh(l(\beta_t^j)) = -\langle \beta_t^j(a_{j-1}), \beta_t^j(a_j)\rangle$$

On calcule la dérivée des deux côtes en $t = 0$.

$$LHS' = \sinh(l(\beta_0^j)) \frac{d}{dt}_{|t=0}(l(\beta_t^j))$$

$$RHS' = -\langle \frac{d}{dt}_{|t=0} \beta_s^j(a_{j-1}), \beta_0^j(a_j)\rangle - \langle \beta_0^j(a_{j-1}) \frac{d}{dt}_{|t=0} \beta_t^j(a_j)\rangle$$

On exprime

$$\beta_0^j(a_j) = \beta_0(a_{j-1}) \cosh(l(\beta_0^j)) + \beta_0'(a_{j-1}) \sinh(l(\beta_0^j))$$

De même

$$\beta_0^j(a_{j-1}) = \beta_0(a_j) \cosh(l(\beta_0^j)) - \beta_0'(a_j) \sinh(l(\beta_0^j))$$

On a alors

$$RHS' = -\langle \frac{d}{dt}_{|t=0} \beta_s^j(a_{j-1}) \ , \ \beta_0(a_{j-1}) \cosh(l(\beta_0^j)) + \beta_0'(a_{j-1}) \sinh(l(\beta_0^j))\rangle$$

$$-\langle \beta_0(a_j) \cosh(l(\beta_0^j)) - \beta_0'(a_j) \sinh(l(\beta_0^j)) \ , \ \frac{d}{dt}_{|t=0} \beta_t^j(a_j)\rangle$$

(Rq : Si x_t est une courbe sur l'hyperboloïde, on a $\langle \frac{d}{dt} x_t, x_0\rangle = 0$. C'est le produit d'un vecteur de l'hyperboloïde et d'un vecteur tangent à l'hyperboloïde)
On peut donc simplifier deux des termes et obtenir (en simplifiant par $\sinh(l(\beta_0^j))$) :

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} l(\beta_t^j) = \langle \beta_0'(a_j), \frac{d}{ds}_{|t=0} \beta_t^j(a_j)\rangle - \langle \beta_0'(a_{j-1}) \frac{d}{dt}_{|t=0} \beta_t^j(a_{j-1})\rangle$$

Maintenant, si on note ζ_j le vecteur unitaire tangent à α au point p_j, on en déduit que

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} \beta_t^j(a_j) - \frac{d}{dt}_{|t=0} \beta_t^{j+1}(a_j) = \zeta_j$$

On a également $\langle \beta_0'(a_j), \zeta_j \rangle = \cos(\theta_j)$, ce qui nous donne finalement la formule. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}_{|t=0} l(\beta_t) &= \sum_{j=1}^{k} \frac{d}{dt}_{t=0} l(\beta_t^j) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \langle \beta_0'(a_j), \frac{d}{ds}_{|t=0} \beta_t^j(a_j) \rangle - \langle \beta_0'(a_{j-1}) \frac{d}{dt}_{|t=0} \beta_t^j(a_{j-1}) \rangle \\
&= \langle \beta_0'(a_1), \frac{d}{ds}_{|t=0} \beta_t^1(a_1) \rangle - \langle \beta_0'(a_0) \frac{d}{dt}_{|t=0} \beta_t^1(a_0) \rangle \\
&+ \langle \beta_0'(a_2), \frac{d}{ds}_{|t=0} \beta_t^2(a_2) \rangle - \langle \beta_0'(a_1) \frac{d}{dt}_{|t=0} \beta_t^2(a_1) \rangle \\
&\ldots \\
&+ \langle \beta_0'(a_k), \frac{d}{ds}_{|t=0} \beta_t^k(a_k) \rangle - \langle \beta_0'(a_{k-1}) \frac{d}{dt}_{|t=0} \beta_t^k(a_{k-1}) \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{k} \langle \beta_0'(a_j), \zeta_j \rangle
\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration.

□

C . Preuve du plongement propre

On choisit une décomposition en pantalon $\alpha_1, \ldots, \alpha_{3g-3}$, et des courbes transverses $\beta_1, \ldots, \beta_{3g-3}$ choisies de sorte que $i(\alpha_i, \beta_i)$ soit minimal dans le tore-a-un-trou ou sphere-a-quatre-trous contenant α_i. Cela nous donne un système de courbe qui permet de définir les coordonnées de Fenchel-Nielsen associées :

$$FN : \mathcal{T}(\Sigma) \to \mathbb{R}_{>0}^{3g-3} \times \mathbb{R}^{3g-3}$$

On note τ_i le twist de Dehn selon α_i. Et on note $\gamma_i = \tau_i(\beta_i)$.

On va montrer que l'ensemble des longueurs $\{(l_X(\alpha_i), l_X(\beta_i), l_X(\gamma_i))\}_{i \in I}$ détermine entièrement les coordonnées de Fenchel Nielsen. Il suffit de montrer qu'un paramètre de twist θ_i est uniquement déterminé par le triplet $(l_X(\alpha_i), l_X(\beta_i), l_X(\gamma_i))$.

Pour cela on passe par les fonctions intermédiaires :

$$B(s) = l_{X_s}(\beta_i), \qquad C(s) = l_{X_s}(\beta_i)$$

L'action du twist de Dehn sur les coordonnées nous disent que $B(s + 2\pi) = C(s)$.

On utilise alors la stricte convexité de la fonction B pour montrer que s est uniquement déterminée par la valeur $B(s + 2\pi) - B(s)$. (Faire un dessin d'une fonction strictement convexe)

D . Projectivisation

On a donc un plongement propre :

$$l_* : \mathcal{T}(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{S}}$$

On peut donc décrire l'espace de Teichmuller en termes de longueurs de courbes fermées simples. Le plongement est propre, on peut décrire comment on peut aller à l'infini dans l'espace de Teichmuller.

En effet, si une suite $X_n \to \infty$ dans l'espace de Teichmuller, alors il existe une courbe (beaucoup en fait) dont la longueur va tendre vers $+\infty$. En effet, on a au moins une courbe qui sort de tout compact de $\mathbb{R}_{>}0$, et si la courbe tend vers 0, alors on prends une courbe transverse et elle tend vers l'infini. Donc l'image de la suite dans $\mathbb{R}^{\mathcal{S}}$ tend vers l'infini. On peut alors comprendre si il y a une sous-suite qui converge asymptotiquement vers un rayon, ou bien de façon équivalente prendre la projectivisation :

Proposition 4 .21 L'application $Pl_* = P \circ l_*$:

$$Pl_* : \mathcal{T}(\Sigma) \longrightarrow P\mathbb{R}^{\mathcal{S}}$$

est injective.

Démonstration : Cela vient du fait qu'on peut exprimer les longueurs en termes de traces, et qu'on a des relations du type :

$$\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(AB) + \mathrm{tr}(AB^{-1})$$

Ces relations peuvent s'exprimer comme des relations sur les cosh des longueurs de certaines courbes simples. Ces relations sont non linéaires. En choisissant quatre courbes A, B, AB, AB^{-1} qui soient simples, on en déduit qu'on ne peut pas avoir deux points sur la même droite vectorielle dans l'image. (exercice)

□

E . Pincer une courbe

Pour motiver l'introduction de la notion de lamination géodésique mesurée pour pouvoir compactifier l'espace de Teichmüller, nous commençons avec un résultat basique sur le comportement asymptotique d'une suite d'éléments de l'espace de Teichmuller.

Soit Σ une surface (fermée) avec un système de courbe sur Σ définissant des coordonnées de Fenchel-nielsen. On considère un point quelconque de l'espace de Teichmüller

$$X_t = FN^{-1}(t, l_2, \ldots, l_{3g-3}, \theta_1, \ldots, \theta_{3g-3}) \text{ pour } t \in \mathbb{R}_{>0}.$$

On pince la surface, c'est-à-dire qu'on fait tendre t vers 0.

Proposition 4 .22 Pour tout α, β courbes fermées simples sur Σ, on a

$$\lim_{t \to 0} \frac{l_{X_t}(\alpha)}{l_{X_t}(\beta)} = \frac{i(\alpha, \gamma_1)}{i(\beta, \gamma_1)}$$

Démonstration : On montre qu'il existe une fonction $\lambda(t)$ telle que pour tout $\beta \in \mathcal{S}$, $\lambda(t) l_{X_t}(\beta) \to i(\beta, \gamma_1)$.

En effet, une conséquence du lemme du collier nous dit qu'il existe une fonction $C(t)$ telle que

$$l_{X_t}(\beta) \geq C(t) i(\beta, \gamma_1)$$

De plus, il existe une constante K ne dépendant pas de t (mais dépendant uniquement des autres coordonnées de Fenchel-Nielsen de la surface) telle que

$$l_{X_t}(\beta) \leq C(t) i(\beta, \gamma_1) + K$$

Il suffit alors de prendre $\lambda(t) = \frac{1}{C(t)}$.

□

Cette proposition nous dit qu'on a une suite dans l'espace de Teichmüller qui tends dans $P\mathbb{R}^{\mathcal{S}}$ vers la fonction correspondant à l'intersection avec une courbe.

On ne peut pas espérer que ce comportement simple soit suffisant pour décrire toutes les limites de suites divergeant dans l'espace de Teichmuller. On a besoin d'objets qui sont des "limites" de courbes fermées simples. Les objets adéquats sont les laminations géodésiques mesurées.

II . Laminations géodésiques

A . Definitions

On rappelle qu'une géodésique sur une surface hyperbolique X est l'image dans le quotient $\mathbb{H}/\Gamma$ d'une géodésique de $\mathbb{H}$. Autrement dit, c'est une orbite du flot géodésique. Une géodésique de $\mathbb{H}$ est entièrement déterminée par ses deux extrémités sur $\partial\mathbb{H}$.

On dit qu'une géodésique sur X est simple si elle n'a pas d'autointersection.

Définition 4 .20 : Une lamination géodésique est un sous-ensemble fermé $\mathcal{L} \subset X$ qui est une union disjointe de géodésiques simples

Il peut être intéressant de regarder le cas du tore plat $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ où les géodésiques sont les projections des droites de $\mathbb{R}^2$. On a deux types de géodésiques :

- Les géodésiques fermées qui correspondent aux pentes rationnelles.
- les géodésiques infinies qui correspondent aux pentes irrationnelles. Ces géodésiques sont denses dans la surface.

Pour une surface hyperbolique les choses sont très différentes On peut construire des exemples :

- Une union de géodésiques fermées simples.
- L'union d'une géodésique qui spirale vers une géodésique fermée limite (une lamination étant un ensemble fermé, la géodésique spiralant n'est pas une lamination.)
- Une limite de courbes simples de plus en plus longues.

On peut donner deux exemples un peu complexes de laminations géodésiques.

Limite d'une courbe par un élément du groupe modulaire

On se place dans la sphère à quatre pointes que l'on représente simplement comme le plan privé de trois points. On va appliquer un tressage à cette surface. On regarde les images successives d'une courbe faisant le tour de deux pointes. Après 3 ou 4 itérations il y a des dizaines de brins, et ça commence à ressembler à une lamination.

Echange d'intervalle

On prends un intervalle I que l'on décompose en une union finie $I = I_1 \cup \cdots \cup I_k$ d'intervalle d'intérieurs disjoint. On définit une application de I dans I qui est une isométrie par morceau. On peut alors définir une surface (la suspension de ϕ qui est obtenue en collant des rectangles $I_j \times [0, 1]$ et en les recollant de la façon évidente sur l'intervale d'arrivée.

En prenant le feuilletage de chacun des rectangles, on obtient un feuilletage de la surface par des droites et des courbes fermées simples. Si on munit la surface d'une structure hyperbolique et qu'on "tend" chaque feuille de ce feuilletage, on obtient une lamination géodésique.

Avec des bonnes hypothèses sur la permutation des morceaux (irréductible) et les longueurs des intervalles (rationnellement indépendants), on obtient quelque chose d'intéressant.

Les deux exemples précédents sont trompeurs car ils donnent l'impression qu'une lamination peut remplir la surface (comme dans le cas du tore). C'est exactement l'inverse qui se produit. Les laminations prennent très peu de place (en fait une lamination est toujours de mesure nulle sur la surface), même lorsqu'il y a un nombre non dénombrable de feuilles.

Proposition 4 .23 Une lamination géodésique est nulle part dense (d'intérieur vide) et s'exprime de façon unique comme une union disjointes de géodésiques simples

Pour montrer cette proposition on a besoin de deux lemmes :

Lemme 4 .8 Si $\mathcal{L} = \cup_{x\in\mathcal{L}}\gamma_x$ est une partition en géodésique, alors la direction de γ en x varie continument avec x.

Démonstration : Soient x et y proches. Si $\gamma_x = \gamma_y$, il est clair que la direction varie continument (puisque c'est une géodésique). Si γ_x et γ_y sont disjoints, il est clair que la direction de γ_y doit être proche de celle de γ_x (faire un dessin).

□

Lemme 4 .9 La fermeture d'une union disjointe non-vide de géodésique est une lamination

Démonstration : Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$ une suite de points convergeant vers $x \in X$. Soit γ_n la géodésique passant par x_n (dans la décomposition en union disjointe choisie).

L'ensemble des directions étant compact, on peut choisir une sous-suite de γ_n dont les directions convergent. On note alors γ la géodésique passant par x ayant pour direction la direction limite. Par continuité de la direction, il ne peut y avoir qu'une seule géodésique passant par x (ainsi toute la suite γ_n converge vers γ

On montre que tous les points de la géodésique γ sont dans $\overline{\mathcal{L}}$. En effet, si y est sur la géodésique γ à distance d de x sur cette géodésique (comptées algébriquement), on peut définir une suite de points $y_n \in \gamma_n$ à distance d de x_n. Il est clair que la suite y_n converge vers y.

□

On peut maintenant passer à la preuve de la proposition :

Démonstration : On admet d'abord que la lamination $\mathcal{L}$ est un sous-ensemble strict de X. En effet, si X est une union disjointe de géodésiques simples, cela définit un champ vectoriel nulle part nul sur la surface. Or $\chi(X) < 0$, et donc on obtient une contradiction avec le théorème de Poincaré-Hopf (généralisation de la boule chevelue).

On relève dans le plan hyperbolique $\mathbb{H}$. On note

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \cup_{x\in\widetilde{\mathcal{L}}}\gamma_x$$

le relevé de la lamination (où deux géodésiques γ_x, γ_y sont disjointes ou égales).

Supposons que $\widetilde{\mathcal{L}}$ contient un arc α coupant un certain γ_x transversalement en x. ON définit $\Phi : \alpha \times \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ par $\Phi(y, t)$ est le point de γ_y à distance t de y.

L'application Φ est continue (d'après le lemme précédent), et il est clair que $\Phi(\alpha \times \mathbb{R}) \subset \widetilde{\mathcal{L}}$.

Donc pour tout $d > 0$, il existe un point z dans l'image telle que le disque $B_d(z)$ en entièrement inclus dans $\Phi(\alpha \times \mathbb{R})$. Pour d suffisamment grand, ce disque contient un domaine fondamental pour l'action de Γ sur $\mathbb{H}$ (où $X \simeq \mathbb{H}/\Gamma$). On en déduit que $B_d(z)$ recouvre X, ce qui implique que $L = X$. Contradiction.

□

B . Structure d'une lamination

On va montrer qu'une lamination admet peu de "sous-laminations".

Définition 4 .21 : Soit $L \sqcup_{i \in I} \gamma_i$ une lamination géodésique. Une feuille de la lamination est isolée si pour tout point $x \in L$, il existe un voisinage $U \subset X$ tel que $(U, U \cap L)$ est homéomorphe à (disque , diamètre).

On peut montrer qu'il suffit de vérifier la propriété en un seul point $x \in \gamma$. (Exercice)

On appelle $L' = L \setminus \{\text{feuilles isolées}\}$ la lamination dérivée de L. Il est clair que si L' est vide alors L est une union finie de géodésiques simples fermées.

Une composante connexe de $X \setminus L$ est appelée une région principale pour L. Si U est une région principale, alors U est une surface hyperbolique à bord géodésique (avec potentiellement des piqûres sur le bord).

Une feuille de bord d'une région principale U, est une feuille γ de L telle que pour tout $x \in \gamma$, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $N_\varepsilon(x) \cap U$ contient au moins une composante de $N_\varepsilon(x) \setminus \sigma$ où σ es le segment de γ de longueur 2ε centré en x. (En gros, une feuille de bord est isolée d'un côté).

Lemme 4 .10 L'union des feuilles de bord est dense dans L.

Démonstration : Comme L est nulle part dense, pour tout point $x \in L$ il existe un point arbitrairement proche u qui est dans une région principale. En prenant l'intersection de la géodésique joignant u à x avec L on obtient un point d'une feuille de bord arbitrairement proche de x

□

Lemme 4 .11 Une lamination a un nombre fini de régions principales, chacune avec un nombre fini de feuille de bord

Démonstration : Chaque région principale est l'intérieur d'une surface hyperbolique complete à bord géodésique. Par des considérations sur l'aire de chaque région principale (d'aire au moins π) on a directement le résultat.

□

On peut montrer qu'il y a au plus $4g - 4$ régions principales et $12g - 12$ feuilles de bord.

Lemme 4 .12 Si L est une lamination sans feuille fermée, alors une région principale U est soit un polygone idéal ou bien l'union d'un compact avec des couronnes (un cylindre avec des piqûres sur l'un des bords).

Démonstration : On passe dans $\mathbb{H}$. On prends une feuille de bord et on regarde les feuilles de bord adjacentes en chaque extrémité (car on sait que la feuille n'est pas fermée). Si on boucle alors c'est un polygone, sinon il existe une isométrie qui laisse U invariant et qui décale les feuilles. A écrire

□

Une lamination est dite pleine si toutes les régions principales sont des polygônes idéaux. Une telle lamination est maximale (c'est à dire que toute autre lamination l'intersecte)

Le compact obtenu dans le lemme précédent est appelé le coeur de la région principale. On le note U_0 pour une région principale U.

Lemme 4 .13 Si L est une lamination sans feuille fermée, alors aucun point à l'infini n'est l'extrémité d'une infinité de feuille de $\widetilde{L}$

Démonstration : Si il y en a une infinité, il y a une translation fixant ce point. L'axe de cette translation est dans $\widetilde{L}$ et correspond à une courbe fermée dans X.

□

Lemme 4 .14 Toute feuille fermée $C \subset L$ possède un voisinage N tel que $L' \cap N \subset C$.

Démonstration : Soit g l'élement de Γ représentant C avec axe $\widetilde{C}$ de distance de translation d. Il existe un ε tel que si $\widetilde{\gamma}$ est une géodésique qui est ε proche de $\widetilde{C}$ alors $\widetilde{\gamma}$ et $g\widetilde{\gamma}$ s'intersectent.

Donc le seul moyen d'avoir une feuille arbitrairement proche de C est d'avoir une géodésique ayant une extrémité en commun avec $\widetilde{C}$. Mais alors, les translatés de cette géodésique par le sous-groupe engendré par g forment une infinité de feuilles ayant la même extrémité, ce qui est impossible par le lemme précédent.

□

Proposition 4 .24 Si L est une lamination et L_1 est une sous-lamination. Alors $L' \cap L_1$ est une union de composantes de L'.

Démonstration : Soit L_2 l'union des feuilles non-fermées de $L_1 \cap L'$. Par le lemme précédent, L_2 est fermé dans la surface et est donc une lamination sans feuille fermée. On va montrer que l'intersection de L' avec toute région principale U de L_2 est contenue dans le coeur U_0.

On identifie $\widetilde{X}$ avec $\mathbb{H}$, et $\widetilde{L}, \widetilde{L}'$ la préimage de L, L', et $\widetilde{U}$ une composante de la préimage de U. Toute feuille de $\widetilde{L}$ qui rencontre $\widetilde{U}$ est contenue dans $\widetilde{U}$. Si c'est un polygône idéal, alors $\widetilde{U} \cup \widetilde{L}$ est une union d'un nombre fini de diagonales de $\widetilde{U}$ qui sont toutes isolées donc $\widetilde{U} \cap \widetilde{L}'$ est vide. Sinon, il y a un coeur compact tel que chaque composante de $\widetilde{U} \setminus \widetilde{U}_0$ est le revêtement universel d'une couronne. Toute feuille de $\widetilde{U} \cap \widetilde{L}$ non contenue dans $\widetilde{U}_0$ possède un bout dans l'une de ces composantes. Donc cette feuille est isolée (d'après un lemme précédent) et donc les seules feuilles de $\widetilde{U} \cap \widetilde{L}'$ sont contenues dans $\widetilde{U}_0$.

□

Une lamination est dite minimale si elle ne possède pas de sous-lamination. On remarque que dans ce cas pour toute feuille γ, la fermeture $\overline{\gamma}$ est une sous-lamination, donc toute feuille est dense dans une lamination minimale.

Théorème 4 .20 Toute lamination L peut s'écrire

$$L = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_i \cup \gamma_1 \cdots \cup \gamma_j \cup \delta_1 \cup \delta_k$$

où les Λ_i sont des laminations minimales infinies, les γ_j sont des géodésiques fermées et les δ_k sont des feuilles isolées qui "spiralent" de chaque côté vers une lamination minimale ou une géodésique fermée.

Démonstration : Voir Bonahon "Curves on surfaces"

□

On note $\mathcal{GL}(\Sigma)$ l'ensemble des laminations géodésiques sur Σ. On remarque qu'on ne fait pas mention de la structure hyperbolique choisie sur Σ, c'est parce qu'on peut donner une paramétrisation des laminations géodésiques qui soit indépendante de la structure hyperbolique. (On identifie une géodésique à une paire de points dans le bord à l'infini).

Proposition 4 .25 L'ensemble $\mathcal{GL}(\Sigma)$ des laminations géodésiques est compact pour la distance de Hausdorff

Démonstration : Admis. Voir Casson-bleiler pour une preuve

□

En particulier cela veut dire que toute suite de courbe fermées simples possède une sous-suite qui converge dans les laminations géodésiques.

Cependant, cet espace de laminations n'est pas très adapté pour faire de l'analyse car il est totalement disconnecté (et donc de dimension 0). Une meilleure idée est de considérer des laminations géodésiques avec une mesure transverse

III . Laminations mesurées

Etant donné une lamination $\mathcal{L}$, on dit qu'un arc k est transverse à la lamination $\mathcal{L}$, si en chaque point d'intersection de k et $\mathcal{L}$, la tangente à k est distincte de la tangente à $\mathcal{L}$. On demande également que les bords de l'arc ne soient pas dans $\mathcal{L}$

Etant donné une géodésique fermée simple γ et un arc k transverse, on peut associer une mesure naturelle qui est la mesure de comptage du nombre d'intersection entre γ et k. On peut voir que cette mesure est invariante par homotopie qui préserve la transversalité, et que la mesure est additive (si on prends la concatenation de deux arcs, l'intersection du nouvel arc et la somme des deux précédents).

L'idée d'une mesure transverse est de généraliser cette mesure de comptage aux laminations géodésiques. Dans ce cas, l'intersection d'un arc et d'une lamination n'est plus un ensemble discret. Il faut donc remplacer la mesure de comptage (qui dit "combien" de fois l'arc croise la lamination γ) par une "vraie" mesure continue. Cette mesure devant évidemment satisfaire les mêmes propriétés naturelles que la mesure de comptage.

A . Première définition

Définition 4 .22 : Soit $\mathcal{L}$ une lamination. Une mesure transverse μ à la lamination $\mathcal{L}$ est la donnée d'une mesure $\mu_{|k}$ pour chaque arc $k \subset \Sigma$ qui est transverse à $\mathcal{L}$ et satisfaisant :
- Si k' est un sous-arc de k, alors $\mu_{|k'}$ est la restriction de $\mu_{|k}$.
- Si k, k' sont deux arcs homotopes par une homotopie qui préserve la transversalité, alors les mesures coincident.

Une conséquence de la deuxième condition est que le support de la mesure $\mu_{|k}$ est contenu dans l'intersection $k \cap \mathcal{L}$. Une lamination mesurée est une paire $(\mathcal{L}, \mu)$. La mesure μ étant portée par $\mathcal{L}$ on notera parfois seulement μ par abus de notation.

On peut mettre une topologie sur cet ensemble de lamination en déclarant qu'une suite (μ_n) de laminations mesurées converge vers μ si pour tout arc $k \subset \Sigma$ transverse à toute géodésique simple, et toute fonction continue $f : k \to \mathbb{R}$ à support compact

$$\int_k f \ d\mu_n \to \int_k f \ d\mu$$

B . Courant Géodésique

On peut donner une autre description d'une mesure transverse. On pose $X = \mathbb{H}/\Gamma$ de sorte que l'application développante donne dev : $\widetilde{X} \to \mathbb{H}$. Le cercle à l'infinit de $\mathbb{H}$ donne un cercle à l'infini X_∞. Les géodésiques sur $\widetilde{X}$ déterminent une paire de points sur $\partial\mathbb{H}$. Si on note $G(\widetilde{X})$ l'ensemble des géodésiques, on a une identification :

$$G(\widetilde{X}) = (\partial\mathbb{H} \times \partial\mathbb{H} \setminus \Delta)/ \simeq$$

L'action de Γ sur $\mathbb{H}$ détermine une action de $\pi_1(X)$ sur $G(\widetilde{X})$. Une lamination géodésique sur X se relève en une lamination géodésique $\widetilde{\mathcal{L}}$ sur $\widetilde{X}$. On définit une mesure transverse sur $\mathcal{L}$ comme une mesure $\pi_1(X)$-invariante sur $G(\widetilde{X})$ (qui soit Radon, ie les compacts sont de mesure finie).

Si α est un arc transverse à la lamination sur X et $\widetilde{\alpha}$ un arc transverse sur $\mathbb{H}$. On peut découper $\widetilde{\alpha}$ de sorte que sur chaque arc, on ne croise chaque feuille de la lamination qu'une seule fois. On a alors :

$$\mu(\widetilde{\alpha}) = \mu\{l \in \widetilde{\mathcal{L}} \mid l \cap \widetilde{\alpha} \neq \emptyset\}$$

L'invariance par $\pi_1(X)$ fait que la mesure descend sur une mesure pour α qui est portée par $\mathcal{L} \cap \alpha$.

C . Multicourbes

Un exemple simple de lamination géodésique est donnée par une géodésique fermée simple γ. Il est clair qu'une mesure transverse est un multiple de la forme d'intersection avec cette courbe (exercice). C'est à dire que si α est un arc transverse à la géodésique, la mesure associée à α est la mesure de comptage de $\alpha \cap \gamma$ à une constante multiplicative près. Autrement dit :

$$\mu(\alpha) = \lambda i(\alpha, \gamma)$$

Plus généralement, étant donné une multicourbe $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}$ (un ensemble de courbes non homotopes disjointes) avec multiplicité, on a une lamination mesurée donnée par la mesure de comptage.

On donne maintenant une construction des coordonnées de Dehn-Thurston sur l'ensemble des multicourbes. Cela pourra être généralisé ensuite pour une lamination géodésique mesurée quelconque.

Soit une surface Σ avec une décomposition en pantalon $\mathcal{P} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$. Soit γ une multicourbe. on définit $s_i = i(\gamma, \alpha_1)$. On remarque que si $\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k$ sont les bords d'un même pantalon, alors $s_i + s_j + s_k$ est un nombre pair.

Pour définir le paramètre de twist, il faut des coutures, c'est à dire des courbes β_j transverses à la décomposition en pantalon. On choisit également des cylindres autour de chaque courbe de la décomposition en pantalon. Les traces de ces courbes découpent chaque pantalon en deux hexagones. On place la courbe dans une position standard : Dans chaque pantalon, les arcs de γ allant d'un bord à un bord différent doivent rester dans un hexagone donné. Les arcs allant d'un bord à lui-même ne doivent rencontrer que deux coutures, dans un ordre correspondant à l'orientation (c'est à dire que l'arc va s'enrouler sur la jambe "gauche").

Dans chaque cylindre, on définit t_i comme le nombre d'intersection de γ avec l'une des courbe β_j (transverse à α_i), comptée de façon algébrique lorsque $s_i \neq 0$. Si $s_i = 0$, alors le nombre de twist t_i compte simplement le nombre de composante de γ parallèle à α_i. On peut donc voir l'ensemble d'arrivée comme $(\mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z})/\sim$ où on a $(0, t) \sim (0, -t)$.

Il faudrait vérifier que le nombre ne dépend pas du choix de la courbe duale choisie (parmi les deux possibles), et indépendante des orientations choisies sur les courbes.

Théorème 4 .21 L'application

$$DT : \mathcal{MS}(\Sigma) \longrightarrow (\mathbb{Z}_{\geq 0}^{3g-3} \times \mathbb{Z}^{3g-3})/\sim$$
$$\gamma \longmapsto \{(s_i, t_i)\}$$

est injective. Son image est l'ensemble satisfaisant la condition de parité dans chaque pantalon.

Démonstration : Il suffit de construire un inverse à cette application. Les paramètres t_i permettent de déterminer entièrement la trace de la courbe γ dans chaque pantalon, modulo une isotopie fixant globalement le bord.

Ensuite, étant donné deux pantalons adjacents le long de la courbe α_i, on a s_i points d'intersections venant de chaque côté. C'est le paramètre de twist qui nous permet de décider comment recoller ces points ensembles. (Dans le cas où $s_i = 0$, c'est encore plus simple).

Faire un dessin pour comprendre

□

D . Coordonnées pour des laminations mesurées

On va construire des coordonnées sur l'ensemble des laminations mesurées exactement comme pour les courbes fermées simples. Il faut simplement remplacer le nombre d'intersection $i(\gamma, \alpha_i)$ ou $i(\gamma, \beta_i)$ par $\mu(\alpha_i)$.

On définit d'abord l'intersection d'une courbe avec une lamination. Soit $\gamma \in \mathcal{S}$ une classe d'isotope de courbe fermée simple et $(\mathcal{L}, \mu)$ une lamination mesurée. On définit :

$$i(\gamma, \mu) = \min_{\gamma_0 \in [\gamma]} \int_{\gamma_0} d\mu$$

Proposition 4 .26 Le minimum est réalisé par l'unique géodésique dans la classe γ

Démonstration : En passant dans le revêtement universel, et par la définition par les courants géodésiques, il est clair que c'est la géodésique qui va intersecter "le moins" la lamination $\widetilde{L}$.

□

On peut maintenant définir des coordonnées de Dehn-Thurston pour les laminations mesurées.

Soit $(\mathcal{L}, \mu)$ une lamination géodésique mesurée. On définit

$$s_i(\mu) = i(\mu, \gamma_i)$$

Les γ_i étant choisis géodésiques, ils réalisent le minimum d'intersection avec la lamination.

Pour le paramètre de twist, on doit utiliser un peu plus de choses. Etant donné que l'espace des laminations mesurées peut se définir indépendamment de la métrique, on va choisir une surface hyperbolique ayant des propriétés agréables pour pouvoir définir le paramètre de twist et mettre la lamination géodésique dans une position standard.

On part d'une décomposition en pantalon $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{3g-3}\}$ et une structure hyperbolique sur Σ de sorte que les longueurs des γ_i soient toutes égales et suffisamment petites. Par le lemme du collier, il y a des cylindres C_i très long autour de α_i de sorte que les courbes bordant le cyclindre C_i soient de longueur $\frac{1}{2}$ (attention, les courbes de bord ne sont pas des géodésiques). On note $C_1, \ldots, C_{3g-3}$ les cylindres, et $P_1, \ldots, P_{2g-2}$ les pantalons obtenus en retirant les cylindres. Noter que ces pantalons ne sont pas à bord géodésique (puisque le cyclindre n'est pas à bord géodésique).

En choisissant des α_i suffisamment petits, on peut s'assurer que toute géodésique simple qui traverse le pantalon va être en "position standard", et tout le twist va être concentré dans les cylindres $\mathbb{C}_i$.

De façon plus explicite, on peut observer le lemme suivant :

Lemme 4 .15 Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que si les α_i sont de longueur inférieure à δ (et les courbes de bord des cylindres, de longueur $> 1/2$) alors deux géodésiques simple complètes sur Σ qui intersectent P_j en deux arcs isotopes, sont à distance ε l'une de l'autre (dans P_j)

Démonstration : Quand on relève dans le plan hyperbolique, comme on a choisi les bords des pantalons de longueur $1/2$, ces bords sont à distance bornée. (En effet, l'aire du pantalon est bornée par π, et donc il est clair que si les deux courbes étaient à grande distance, on pourrait trouver un rectangle d'aire très grand dans le pantalon.)

Alors deux géodésiques qui rencontrent les courbes α_i vont être à distance très petite dans l'intérieur du pantalon.

En faisant un dessin, on voit pourquoi ça marche.

□

Ce lemme nous dit qu'en choisissant ε suffisamment petit, on peut considérer des fenètres dans les bords de chaque P_j de sorte que toute géodésique simple qui passe dans le pantalon P_j passera par ces fenêtres (il y a quatre fenêtre pour chaque bord de pantalon, deux qui correspondent aux arcs qui vont d'un bord à l'autre, et deux qui correspondent aux arcs qui vont d'un bord à lui-même).

On choisit alors un arc β_i dans C_i dont les extrémités sont en dehors des fenêtres. Toute lamination va croiser α_i de façon transverse. On peut alors définir le paramètre de twist par

$$t_i(\mu) = \int_{c_i} d\mu$$

(Ce paramètre de twist dépend de l'arc choisi, de la même façon que les coordonnées de Fenchel-Nielsen dépendent des courbes transverse à la décomposition en pantalon)

Si la courbe α_i n'est pas dans la lamination, on peut définir un signe pour ce paramètre de twist : positif si la courbe "tourne à gauche" dans le cylindre C_i.

On a donc une application

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{P}} : \mathcal{ML}_{\mathcal{P}}(\Sigma) &\to (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R})^{3g-3} \\ (\mathcal{L}, \mu) &\mapsto \{(s_i(\mu), t_i(\mu)\}_{1 \leq i \leq 3g-3} \end{aligned}$$

On peut étendre l'application aux laminations qui contiennent une des courbe γ_i. Dans ce cas, le signe du paramètre de twist n'est pas bien défini. On est donc dans

$$(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}) / \simeq$$

où $(0, t) = (0, -t)$. Cela donne en fait un cône sur $\mathbb{R}P^1$ que l'on peut noter $C\mathbb{R}P^1$ est qui est homéomorphe à $\mathbb{R}^2$.

Proposition 4 .27 Les coordonnées donnent un homéomorphisme entre $\mathcal{ML}(\Sigma)$ et $\mathbb{R}^{3g-3}_{>0} \times \mathbb{R}^{3g-3} \setminus \{0\}$. De plus $\Phi_{\mathcal{P}}(t\mu) = t\Phi_{\mathcal{P}}(\mu)$, donc $\mathcal{PML}(\Sigma) \simeq \mathbb{S}^{6g-7}$.

Démonstration : Pour construire un inverse à cette application, on va construire un feuilletage qui va correspondre aux coordonnées. Puis ensuite, on va tendre le feuilletage pour obtenir une lamination.

Soient (s_i, t_i) des coordonnées. Si $s_i = 0$, on considère la surface obetnue en coupant le long de α_i et on applique le raisonnement à cette sous-surface. On peut donc supposer que les s_i sont non-nuls. On considère un pantalon P_j avec des composantes de bord $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. (noter que ces composantes ne sont pas forcément distinctes dans Σ.) On munit le pantalon d'une structure hyperbolique telle que les bords sont s_1, s_2, s_3.

On se place pour simplifier dans le cas où $s_i < s_j + s_k$ (et toutes les permutations), c'est à dire que le triplet satisfait une inégalité triangulaire stricte. (Les autres cas se font de façon similaire). On note γ_{ij} l'arc géodésique reliant α_i à α_j. On note $r_{ij} = \frac{s_i+s_j-s_k}{4}$ et on considère le voisinage

$$N_{ij} = N_{r_{ij}}(\gamma_{ij})$$

qui est un rectangle. Les trois rectangles ne se rencontrent deux à deux qu'en deux points sur les bords α_i. On peut considèrer dans chacun des N_{ij} la famille de courbes équidistante à γ_{ij} (ce ne sont pas des géodésiques bien sur).

On considère également des petits cylindres autour de chaque α_i (suffisement petits pour être plongés dans la surface). Dans ces cylindres on considère le feuilletage donné par un twist t_i.

Après recollement, on a une famille de courbes donnée par le feuilletage partiel. On peut alors tendre ce feuilletage partiel pour obtenir une lamination. Il suffit de montrer que les feuilles du feuilletage ont des extrémités bien définies sur le bord du plan hyperbolique (pas complètement trivial, il faut peut-être réfléchir un peu). Ensuite, il faut utiliser le fait que les feuilles sont simples et disjointes pour justifier le fait que les géodésiques obtenues sont simples et disjointes (c'est une propriétés des extrémités donc ça marche).

La mesure sur cette lamination est celle donnée par le feuiilletage. Si on a un arc transverse à la lamination qui croise un ensemble E de feuilles de cette lamination. On considère la famille de courbes du feuilletage correspondant à la préimage de E. Et on définit la mesure de cet arc en projetant sur les courbes α_i. Cela donne quelque chose de bien défini.

C'est maintenant une simple vérification pour voir que la lamination mesurée obtenue a les bonnes coordonnées.

□

De cette construction il est assez facile d'obtenir

Proposition 4 .28 Le sous-ensemble de $P\mathcal{ML}(\Sigma)$ constitué de $(\mathcal{L}, \mu)$ avec $\mathcal{L}$ une multi-courbe et μ la mesure de comptage, est dense dans $P\mathcal{ML}(\Sigma)$.

Démonstration : Les multicourbes sont les points entiers. Les mutiples réels des points entiers sont denses lorsque qu'on projectivise.

□

IV . Compactification

A . Plongement dans $P\mathbb{R}^{\mathcal{S}}$.

De la même façon que pour l'espace de Teichmuller, on a une application

$$i_* : \mathcal{ML}(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{S}}$$

donnée par la valeur de la forme d'intersection sur l'ensemble des courbes fermées simples.

Proposition 4 .29 L'application

$$i_* : \mathcal{ML}(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{S}}$$

est un plongement propre

Démonstration : En adaptant la preuve donnée pour Teichmüller, on peut montrer qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_{9g-9}$ une famille de courbe telle que la valeur de i_* sur cette famille suffit à déterminer entièrement la lamination mesurées. Les courbes sont les mêmes que celles obtenues pour l'espace de Teichmuller.

Pour montrer que les intersection $i(\gamma_i, \mathcal{L})$ et $i(\beta_i, \mathcal{L})$ suffisent à déterminer le paramètre de twist t_i, on peut montrer que

$$i(\tau_\alpha \beta, \mathcal{L}) = s_i + t_i + i(\beta_i', \mathcal{L})$$

où β_i' est le morceau de la géodésique β qui se trouve en dehors du cylindre C_i.

□

On a une action naturelle de $\mathbb{R}_{>0}$ sur l'ensemble des laminations mesurées, simplement en multipliant la mesure par une constante. Il est alors clair que $i_*(\lambda\mu) = \lambda i_*(\mu)$. On a donc une application

$$Pi_* : \mathcal{PML}(\Sigma) \longrightarrow P\mathbb{R}^{\mathcal{S}}$$

Proposition 4 .30 Les images de Pl_* et de Pi_* sont disjointes dans $P\mathbb{R}^{\mathcal{S}}$.

Démonstration : On voit que si $X \in \mathcal{T}(\Sigma)$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute courbe $\alpha \in \mathcal{S}$, on ait $l_X(\alpha) > \varepsilon$.

Ensuite soit $(\mathcal{L}, \mu)$ une lamination mesurée. On montre qu'il existe une suite α_n de courbes fermées simples telle que

$$\lim_{n\to\infty} i(\mu, \alpha) \to 0$$

En effet, si $\mathcal{L}$ a une feuille fermée simple γ, alors il est clair que $i(\alpha, \gamma) = 0$. Sinon, il y a une feuille de bord qui est localement isométrique à $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}$. Cette feuille doit avoir un point d'accumulation $x \in \Sigma$. Donc pour tout n, on peut construire une courbe x formée d'un morceau de la feuille, suivi d'un arc court avec une intersection avec la lamination inférieur à $1/n$. (Faire un dessin)

Cette preuve passe évidemment au projectif.

□

On peut maintenant énoncer le théorème de compactification proprement dit. On identifie $\mathcal{T}(\Sigma)$ et $\mathcal{PML}(\Sigma)$ à leurs images dans $P\mathbb{R}^{\mathcal{S}}$.

Théorème 4 .22 La fermeture $\overline{\mathcal{T}(\Sigma)}$ de $\mathcal{T}(\Sigma)$ dans $P\mathbb{R}^{\mathcal{S}}$ est donnée par

$$\overline{\mathcal{T}(\Sigma)} = \mathcal{T}(\Sigma) \cup \mathcal{PML}(\Sigma)$$

La fin de cette section est consacrée à l'idée de la preuve de ce théorème. Pour les détails, voir FLP.

B . Lemme fondamental

On montre d'abord qu'on peut "projeter" un point X de l'espace de Teichmuller sur une lamination mesurée μ_X de l'espace $\mathcal{PML}$ de sorte que les longueurs des courbes sur X soient approximée par l'intersection avec μ_X.

On considère un système de courbe. Soit $X \in \mathcal{T}(\Sigma)$ ayant pour coordonnées (l_i, θ_i). On considère la lamination μ_X qui a pour coordonnées de Dehn-Thurston (pour le même système de courbe) (l_i, θ_i) . Pour que l'approximation soit uniforme, on doit se placer sur un sous-ensemble de l'espace de Teichmuller.

Soit $\mathcal{P}$ une décomposition en pantalon de Σ et $\varepsilon > 0$. on note

$$V(\mathcal{P}, \varepsilon) = \{X \in \mathcal{T}(\Sigma) \mid l_X(\alpha_i) > \varepsilon, \forall i\}$$

C'est l'ensemble des surfaces hyperboliques où les courbes de la décomposition en pantalon ne deviennent pas trop petites.

Lemme 4 .16 Etant donné $\mathcal{P}$ et $\varepsilon > 0$, Pour toute courbe $\gamma \in \mathcal{S}$, il existe $K \geq 0$ telle que pour tout $X \in V(\mathcal{P}, \varepsilon)$ on ait

$$i(\gamma, \mu_X) \leq l_X(\gamma) \leq i(\gamma, \mu_X) + K$$

Démonstration : Soit un arc géodésique γ dans X. il est clair que si l'arc est dans un pantalon, la longueur de l'arc est au moins aussi grande que la son intersection avec $\mathcal{L}$. Effectivement, il suffit de se ramener au feuilletage partiel du pantalon et de constater que la longueur d'une courbe est nécessairement plus grande que sa projection sur le bord du pantalon.

C'est la deuxième inégalité qui est plus difficile à montrer. On va d'abord montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $C > 0$ tel que $\forall X \in V(\mathcal{P}, \varepsilon)$, et $P_i \in \mathcal{P}$ la longueur des feuilles du feuilletages dans P_i sont bornées par C. (voir cahier)

En effet, si deux géodésiques α_1 et α_2 sont à distance l, alors la courbe qui est à distance R de la géodésique γ minimisant la distance est de longueur $l \times \cosh(R)$. (exercice). On en déduit que l'aire du R-voisinage de γ est supérieure à $R \times L/(\cosh R)$ où L est la longueur du bord.

Comme on est dans un pantalon, cette aire est bornée par 2π, on en déduit donc que L est plus petit qu'une constante ne dépendant que de R et strictement décroissante. Donc lorsque $R \geq \varepsilon$, on en déduit que les longueurs sont plus petites qu'un truc ...

Ensuite si on prends une courbe fermée simple γ, on peut trouver une courbe dans sa classe d'isotopie qui ne se déplace que le long des feuilles du feuilletage ou bien le long des courbes de $\mathcal{P}$. La longueur des morceaux le long des courbes de $\mathcal{P}$ est exactement l'intersection de la courbe avec la lamination. Ensuite, comme la longueur des feuilles est bornée dans chaque pantalon par une constante ne dépendant que de ε, on peut considérer D, le nombre de pantalon que la géodésique γ rencontre. On a alors $l_X(\gamma) \leq i(\gamma, \mu_X) + CD$.

□

C . Fin de la compactification

Le lemme fondamental nous permet de montrer la proposition suivante

Proposition 4 .31 Soit $X_n \in V(\mathcal{P}, \varepsilon)$ une suite divergeant dans $\mathcal{T}(\Sigma)$ et $\mu_n = \mu_{X_n}$. Alors on a

$$\{Pl_*(X_n)\} \text{ CV } \Leftrightarrow \{Pi_*(\mu_n)\} \text{ CV}$$

De plus, si elles convergent, alors elles ont la même limite.

Démonstration : La suite X_n étant divergente, il existe une courbe γ telle que $l_{X_n}(\gamma) \to \infty$. Supposons que $Pl_*(X_n)$ converge vers $P(\{x_\alpha\})$ avec $x_\alpha \in \mathbb{R}$ pour tout $\alpha \in \mathcal{S}$. Il existe t_n telle que $t_n l_*(X_n) \to \{x_alpha\}$, et donc en utilisant la courbe γ, il est clair que $t_n \to 0$.

Maintenant, pour tout α, on considère $K(\alpha)$ la constante donnée par le lemme précédent. On a donc facilement que

$$\forall \alpha \in \mathcal{S}, \lim_{n \to \infty} t_n i(\mu_n, \alpha) = x_\alpha$$

La réciproque se fait de la même façon

□

On peut maintenant montrer le théorème.

Démonstration : Soit X_n une suite qui diverge dans $\mathcal{T}(\Sigma)$.

Etape 1 : On peut trouver une décomposition en pantalon $\mathcal{P}$, un $\varepsilon > 0$ et une sous-suite X_n telle que $X_n \in V(\mathcal{P}, \varepsilon)$.

En effet, on choisit une décomposition arbitraire $\mathcal{Q}$, et une courbe de cette décomposition. Si il existe une sous-suite de X_n bornée inférieurement, on choisit cette sous-suite et on passe à la courbe suivante. Sinon, la longueur de cette courbe tend vers 0, alors on peut choisir une courbe transverse qui nous donne une nouvelle décomposition en pantalon, et d'après le lemme du collier, la longueur de cette courbe est bien bornée inférieurement. On répète ce processus sur chaque courbe de la décomposition en pantalon initiale.

Etape 2 : En considérant la suite μ_n dans $\mathcal{PML}$, elle a une sous-suite convergente (puisque l'ensemble $\mathcal{PML}$ est compact). On en déduit donc que la suite X_n a également une sous-suite convergente.

On en déduit que

$$\mathcal{T} \cup \mathcal{PML}(\Sigma) \subset \overline{\mathcal{T}(\Sigma)}$$

Etape 3 : Etant donné $\mu \in \mathcal{ML}(\Sigma)$, il existe une décomposition en pantalon $\mathcal{P}$ et $\varepsilon > 0$ tel que $\mu = \mu_X$ pour un certain $X \in V(\mathcal{P}, \varepsilon)$. il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a également $n\mu$ satisfait également cette propriété. On a donc une suite X_n telle que $\mu_{X_n} = \mu$ pour tout n. La longueur des courbes de la décomposition en pantalon tend vers ∞ dans X_n et donc la suite X_n diverge dans l'espace de Teichmuller. On en déduit donc

$$\mathcal{T}(\Sigma) \cup \mathcal{PML}(\Sigma) \subset \overline{\mathcal{T}(\Sigma)}$$

□

De plus, topologiquement $\overline{\mathcal{T}(\Sigma)}$ est une boule fermée dont l'intérieur est Teichmuller et la sphère de bord est PML. La démonstration de ce fait est encore un peu technique. Pour plus de détails, voir FLP.