# Configurations de points idéaux

On identifie $\mathbb{H}$ avec le demi-plan supérieur et $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ le bord du plan hyperbolique. Un polygône idéal marqué est une paire $(P, a)$ où $P$ est un polygône dans $\mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$ dont les sommets sont tous dans $\partial\mathbb{H}$ et $a$ est un sommet de P.
Deux polygônes idéaux marqués $(P, a)$ et $(P', a')$ sont équivalents si il existe $g \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H})$ tel que $g \cdot (P, a) = (P', a')$. On définit $\mathcal{P}_n$ comme l'ensemble des classes d'équivalence $[(P, a)]$ de polygônes idéaux marqués à $n$ côtés.

(1) Soient $a, b, c$ trois points distincts de $\partial\mathbb{H}$. Montrer qu'il existe une unique isométrie $g$ telle que $g \cdot (a, b, c) = (\infty, -1, 0)$. Exprimer cette isométrie comme une matrice de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$. On notera cette isométrie $g_{(a,b,c)}$.

(2) En déduire que $\mathcal{P}_3$ est réduit à un point.

(3) Soit $(Q, a)$ un quadrilatère idéal marqué. On note $b, c, d$ les trois autres sommets du quadrilatère ordonnés dans le sens direct. On note $\lambda(Q, a) = g_{(a,b,c)}(d)$.

Montrer que l'application $\lambda$ définit bien une bijection :

$$\lambda : \mathcal{P}_4 \to \mathbb{R}_{>0}$$

(4) Exprimer $\lambda(Q, b)$, $\lambda(Q, c)$ et $\lambda(Q, d)$, en fonction de $\lambda(Q, a)$.

(5) On note $h$ (respectivement $k$) la projection orthogonale du point $b$ (respectivement $d$) sur la géodésique $(ac)$. On note $d$ la longueur hyperbolique relative entre $h$ et $k$ (comptée positivement dans le sens de $a$ vers $c$.)

Montrer que $d = \ln(\lambda(Q, a))$.

(6) On considère une triangulation d'un polygône idéal $P$ à $n$ côtés, c'est à dire un ensemble $\mathcal{E}$ de $n - 3$ diagonales du polygône qui découpe $P$ en $n - 2$ triangles. Si $E \in \mathcal{E}$ est une diagonale, on considère $Q_E$ le quadrilatère idéal de $P$ formé des deux triangles adjacents à $E$ et $a_E$ l'une des extrémités de $E$.

Montrer que l'application suivante est bien définie et réalise une bijection :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(P_n) &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0}^{n-3} \\ P &\longmapsto (\lambda(Q_E, a_E))_{E \in \mathcal{E}} \end{aligned}$$

(7) Chercher comment changent les coordonnées d'un polygône idéal donné, lorsqu'on effectue un *flip* dans la triangulation. (Voir dessin)

# Correction

(1) On peut écrire le représentant de l'isométrie comme une matrice $g = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ telle que $g \cdot (a,b,c) = (\infty, -1, 0)$. On suppose pour commencer que $a, b, c \in \mathbb{R}$ . On résout donc le système :

$$\begin{cases} \frac{xa+y}{za+t} = \infty \\ \frac{xb+y}{zb+t} = -1 \\ \frac{xc+y}{zc+t} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} za+t = 0 \\ xb+y = -(zb+t) \\ xc+y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -az \\ y = \frac{c(b-a)}{b-c} z \\ x = \frac{a-b}{b-c} z \end{cases}$$

On pose $z = (b-c)z'$ on obtient donc une matrice du type :

$$g = z' \begin{pmatrix} a-b & c(b-a) \\ b-c & a(c-b) \end{pmatrix}, z' \in \mathbb{R}^*$$

Cette matrice est unique à la constante multiplicative $z'$ près. Ce qui nous donne bien une unique matrice de $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$.

Dans le cas où l'un des éléments est $\infty$, on prends la limite de la matrice correspondante renormalisée. Par exemple si $b = \infty$ on obtient

$$g = \lim_{b \to \infty} \frac{1}{b} \begin{pmatrix} a-b & c(b-a) \\ b-c & a(c-b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & c \\ 1 & -a \end{pmatrix}$$

Et de même pour $a = \infty$ ou $c = \infty$

(2) Soit $(P, a)$ un triangle idéal marqué de sorte que $P = (a, b, c)$. La question précédente montre que $(P, a)$ est équivalent au triangle $((\infty, -1, 0), \infty)$. On en déduit que tous les triangles idéaux marqués sont équivalents.

(3) l'isométrie $g = g_{(a,b,c)}$ est bien définie. Comme $g$ est injective, on en déduit que l'image $g(d) \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. Il faut montrer que $g(d) \in \mathbb{R}_{>0}$. Comme les points sont ordonnés sur le cercle $\partial\mathbb{H}$ dans le sens direct et que $d$ se trouve entre $c$ et $a$. On en déduit que $g(d)$ se trouve entre $g(c)$ et $g(a)$. En effet, l'isométrie est forcément directe puisque le triangle $(\infty, -1, 0)$ est orienté dans le même sens (direct) que $(a, b, c)$. Donc $g(d) \in (0, \infty)$.

Réciproquement, si $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, il est clair que le quadrilatère $Q_\lambda = (\infty, -1, 0, \lambda)$ avec $\infty$ comme point marqué, est tel que $\lambda(Q_\lambda, \infty) = \lambda$.

(4) Par un calcul facile, on a les égalités suivantes :

$$\lambda(Q, c) = \frac{1}{\lambda(Q, b)} = \frac{1}{\lambda(Q, d)} = \lambda(Q, a)$$

(5) On se ramène par l'isométrie $g_{(a,b,c)}$ au quadrilatère $(\infty, -1, 0, \lambda)$ dans le demi-plan supérieur. La projection orthogonale du point $-1$ sur la géodésique $(0\infty)$ est le point $i$. De même la projection du point $\lambda$ est le point $\lambda i$. La distance hyperbolique de $i$ à $\lambda i$ est donnée par

$$d(i, \lambda i) = |\ln(\lambda)|$$

La distance est comptée positivement si $\lambda < 1$ et négativement si $\lambda > 1$ donc on obtient l'opposé du résultat voulu dans l'énoncé ... Il y avait une faute de frappe, on aurait du choisir l'orientation de $c$ vers $a$ pour obtenir le bon résultat.

(6) Le seul choix qu'on a fait dans la définition de l'application est le choix d'une des extrémités $a_E$ de la diagonale $E$. Mais d'après la question 4, ce choix ne change pas la valeur de $\lambda(Q_E, a_E)$. Donc l'application est bien définie.

On va montrer la bijectivité par récurrence sur $n$. Les cas $n = 3$ et $n = 4$ ont été fait dans les questions précédentes.

Soit $n > 3$. On suppose que pour toute triangulation et points marqués, l'application $\mathcal{P}_n \to \mathbb{R}^{n-3}_{>0}$ est bijective.

On va montrer qu'au rang $n + 1$, l'application est aussi une bijection. On considère donc une triangulation (abstraite) d'un polygône marqué $P$ à $n + 1$ côtés. On indexe les diagonales de sorte que la diagonale $d_{n-2}$ sépare le polygône $P$ en un triangle et un polygone à $n$ côtés. On note $T$ le triangle découpé de cette façon, et $T'$ le triangle adjacent à $T$ dans la triangulation.

Il suffit maintenant de construire un inverse. Soient $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-3}, \lambda_{n-2})$. Par hypothèse de récurrence, il existe un unique polygône idéal marqué $P'$ à $n$ côtés (à isométrie près) tel que les cordonnées de $P'$ sont $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-3})$. En composant par une isométrie, on peut supposer que $T'$ est le triangle $(\infty, -1, 0)$ avec la diagonale $d_{n-2}$ envoyée sur $(\infty 0)$.

On en déduit qu'il existe un unique point $a_{n+1}$ tel que le quadrilatère $T \cup T'$ a pour coordonnée $\lambda_{n-2}$.

(7) Lorsqu'on effectue un flip, il y a au maximum 5 coordonnées qui peuvent changer. En effet, les coordonnées sur une diagonale, ne dépendent que des deux triangles de chaque côté de cette triangulation. et on ne change que deux triangles adjacents.

On a déjà vu que la coordonnée de l'arête flippée change de $\lambda$ en $\frac{1}{\lambda}$. Pour les autres arêtes, les choses sont un peu plus délicates.

Il suffit de se ramener à un pentagone idéal $(\infty, -1, 0, x, a)$. On considère la triangulation $T$ dont les arêtes sont $e = (\infty, 0)$ et $f = (\infty, a)$. Et la triangulation $T'$ dont les arêtes sont $e$ et $f' = (0, x)$. La triangulation $T'$ est obtenue par le flip de l'arête $f$ en $f'$.

On a alors

$\lambda_e = a$ et $\lambda_f = g_{(a,\infty,0)}(x) = \frac{x-a}{a} = \frac{x}{a} - 1$.

Dans la nouvelle triangulation, on a $\lambda'_e = x$. On peut donc l'exprimer comme :

$$\lambda'_e = (1 + \lambda_f)\lambda_e$$

Attention, ici l'orientation de l'arête par rapport à l'arête flippée est importante. En effet, si on considère l'opération inverse (on passe de l'arête $e'$ à l'arête $e$). On doit donc exprimer $\lambda_e$ en fonction de $\lambda'_e = x$ et $\lambda'_f = \dfrac{1}{\lambda_f}$, on obtient :

$$\lambda_e = \frac{1}{1 + \frac{1}{\lambda'_f}} \lambda'_e$$