Feuille 1 : Premières Définitions

Notations des exercices :
♡ : Exercice de cours. Le résultat est à connaitre.
♠ : Exercice classique. A savoir refaire
★ : Exercice difficile.

Exercice 1 (♡ Exemples de base)**.**
Parmi les exemples suivants, indiquer lesquels sont des groupes :

(1) Les nombres pairs munis de l'addition.
(2) Les nombres impairs munis de la multiplication.
(3) Les nombres complexes $\mathbb{C}$ munis de la soustraction
(4) Les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ munies de l'addition.
(5) Les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ munies de la multiplication.
(6) Les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ munies de la composition.

Exercice 2 (♠ Exemples classiques)**.**
Montrer que les exemples suivants sont des groupes :

(1) Les rationnels non-nuls : $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ muni de la multiplication
(2) Les polynômes de degré au plus n: $\mathbb{R}_n[X]$ muni de l'addition.
(3) Les racines 5-iemes de l'unité $\mathbb{U}_5 = \{z \in \mathbb{C} | z^5 = 1\}$ muni de la multiplication.
(4) L'ensemble des matrices carrée de taille 2 et de determinant 1, muni de la multiplication. (aussi appelé $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$)

Exercice 3 (Exemples de lois)**.**
Montrer que les lois suivantes munissent l'ensemble G indiqué d'une structure de groupe, et préciser s'il est abélien :

(1) Sur $G = \mathcal{P}(X)$, l'ensemble des parties de X, la loi Δ de *différence symétrique*, définie par :
$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$
(2) Sur $G =]-1, 1[$, la loi $\star$: $(x \star y) = \dfrac{x+y}{1+xy}$.
(3) Sur $G = \mathbb{R}^2$, la loi $\odot$: $(x, y) \odot (x', y') = (x + x', ye^{x'} + y'e^{x})$.
(4) Sur $G = \{a, b, c, d\}$ une loi satisfaisant la table :

$*$	a	b	c	d
a	b	a	d	c
b	a	b	c	d
c	d	c	b	a
d	c	d	a	b

Exercice 4 (★ Tous les éléments sont réguliers)**.**
Soit E un ensemble **fini** muni d'une loi de composition interne $\star$ associative. On suppose que tous les éléments de E sont réguliers. Soit $a \in E$ fixé.
(Un élément x est dit *régulier* pour la loi $\star$ si $\forall y, z \in E, [(x \star y = x \star z) \Rightarrow (y = z)]$).

(1) Démontrer qu'il existe $e \in E$ tel que $a \star e = a$. (Principe des tiroirs)
(2) Démontrer que, pour tout $x \in E$, on a $e \star x = x$.
(3) Démontrer que, pour tout $x \in E$, on a $x \star e = x$.
(4) Démontrer que $(E, \star)$ est un groupe.
(5) Le résultat subsiste-t-il si E n'est pas fini ?

Exercice 5 (Un groupe fini d'ordre 4)**.**
Soient les quatre applications de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$:

$$f_1(z) = z \, , \; f_2(z) = \frac{1}{z} \, , \; f_3(z) = -z \, , \; f_4(z) = -\frac{1}{z}$$

Montrer que $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est un groupe pour la loi $\circ$, et dresser sa table.

Exercice 6 (♡ Exemples de sous-groupes)**.**
Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-groupes de G.

(1) Le *centre* de G, défini par $Z(G) = \{x \in G | \forall y \in G, x \cdot y = y \cdot x\}$.
(2) Si H est un sous-groupe de G et $a \in G$ on définit le *conjugué* de H par :
$$aHa^{-1} = \{x \in G | \exists h \in H, x = a \cdot h \cdot a^{-1}\}$$

Exercice 7 (♡ Groupe produit)**.**
Soit $(G, \star)$ et $(H, \Box)$ deux groupes. On définit sur $G \times H$ la loi $\otimes$ définie par :

$$(x, y) \otimes (x', y') = (x \star x', y \Box y')$$

(1) Montrer que $(G \times H, \otimes)$ est un groupe.
(2) Si G est d'ordre 2, dresser la table de $G \times G$.

Exercice 8 (Groupes de rotations du plan)**.**
Soit ABC un triangle équilatéral du plan.

(1) Déterminer l'ensemble des rotations laissant globalement invariant l'ensemble $\{A, B, C\}$. Montrer que c'est un groupe pour la loi $\circ$.
(2) Déterminer l'ensemble des reflexions laissant invariant $\{A, B, C\}$. Est-ce un groupe ?
(3) Montrer que l'ensemble formés des réflexions et rotations est un groupe.
(4) Répondre aux questions précédentes pour pour un carré $ABCD$.

Exercice 9 (Produit de deux sous-groupes)**.**
Soit $(G, \cdot)$ un groupe et A, B deux sous-groupes. On note $A \cdot B = \{ab \,|\, a \in A, b \in B\}$.

(1) Montrer que $A \cdot B$ est un sous-groupe de G si et seulement si $A \cdot B = B \cdot A$.
(2) On se place dans le cas $A \cdot B$ est un sous-groupe. On suppose de plus que A et B sont finis et que $A \cap B = \{e\}$. Montrer que $A \cdot B$ est fini et que $|A \cdot B| = |A| \times |B|$.

Exercice 10 (Multiplication dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)**.** Soit n un entier positif.

(1) Montrer que la loi de multiplication $\bar{x} \times \bar{y} = \overline{xy}$ est bien définie sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
(2) Montrer que la loi $\times$ est associative et qu'il y a un élément neutre qu'on déterminera.
(3) Montrer que $\bar{x}$ admet un inverse pour la loi $\times$ si et seulement si x est premier avec n. (Utiliser Bézout)
(4) Montrer que l'ensemble des éléments inversibles (pour $\times$) de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ forme un groupe pour la loi $\times$, que l'on notera $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$
(5) Déterminer $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^*$ et écrire la table de $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^*$.

Exercice 11 (♠ Image réciproque, image directe de sous-groupe)**.**
Soient $(G, \cdot)$ et $(G', \cdot)$ des groupes et $f \in \mathrm{Hom}(G, G')$.

(1) Montrer que si H' est un sous-groupe de G', alors $f^{-1}\{H'\}$ est un sous-groupe de G.
(2) Montrer que si H est un sous-groupe de G alors $f(H)$ est un sous-groupe de G'.

Exercice 12 (Un endomorphisme)**.**
Soit le morphisme $\phi : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui a une fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ associe la fonction :

$$\begin{aligned} \phi(f) : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) + f(-x) \end{aligned}$$

(1) Montrer que ϕ est un endomorphisme de $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +)$.
(2) Décrire le noyau et l'image de ϕ. (Reconnaitre des espaces de fonctions aux propriétés connues)

Exercice 13 (Endomorphismes d'ensembles de nombres)**.**

(1) Trouver tous les endomorphismes et les automorphismes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$.
(2) ★ Trouver tous les endomorphismes du groupe $(\mathbb{Q}, +)$.
(3) ★ Trouver tous les endomorphismes continus du groupe $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 14 (Inverse)**.** Soit l'application

$$\begin{aligned} f : G &\to G \\ x &\mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

(1) Montrer que f est un morphisme de groupe si et seulement si G est abélien.
(2) Dans ce cas, montrer que f est un isomorphisme.
(3) Déterminer le sous-groupe engendré par f dans $(\mathrm{Iso}(G), \circ)$.

Exercice 15 (Quelques isomorphismes à trouver)**.**

(1) Montrer que $(\mathbb{R}_{>0}, \times)$ est isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.
(2) Montrer que le groupe des racines n-ièmes de l'unité est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
(3) Montrer que le groupe des isométries qui préservent un rectangle (non carré) est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.
(4) Montrer que $((\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^*, \times)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 16 (★ Groupe d'automorphisme)**.** Soit $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p un nombre premier.

(1) Soit $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Montrer que l'application suivante est un automorphisme de G.

$$\begin{aligned} \phi_a : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +) &\longrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +) \\ x &\longmapsto a \times x \end{aligned}$$

(2) Montrer que l'application suivante est un isomorphisme :

$$\begin{aligned} \Phi : ((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*, \times) &\longrightarrow (\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), \circ) \\ a &\longmapsto \phi_a \end{aligned}$$