

Groupe Orthogonal

Exercice 40 (♠ Matrices orthogonales).

Parmi les matrices suivantes, dire lesquelles sont des matrices orthogonales :

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 41 (Endomorphisme orthogonal sur les matrices).

On considère l'opération suivante sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, définie par :

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^tAB)$$

On rappelle que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut se voir comme un espace vectoriel de dimension n^2 .

- (1) Montrer que cela définit bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- (2) Montrer que la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormée.
- (3) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ des matrices symétriques et anti-symétriques, sont orthogonaux.
- (4) Soit $A \in \text{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $\varphi_A : M \mapsto AM$ est un endomorphisme orthogonal de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 42 (♥ Unitaires).

Soit $E = \mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire hermitien

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$$

On dit qu'un endomorphisme u de E est unitaire si

$$\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

On note $\mathcal{U}(E)$ l'ensemble des endomorphismes unitaires

- (1) Montrer que $\mathcal{U}(E)$ est un groupe pour la loi $\circ$.
- (2) Montrer que $u \in \mathcal{U}(E)$ si et seulement si l'image d'une base orthonormale est une base orthonormale.
- (3) Soit $U_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que ${}^t\overline{A}A = I_n$. Montrer que c'est un groupe pour la multiplication des matrices.
- (4) Montrer que $U_n(\mathbb{C})$ est isomorphe à $\mathcal{U}(E)$

Exercice 43 (En dimension infinie).

On considère l'espace E des fonctions continues sur $[-1, 1]$ muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$$

On considère l'application ψ définie par :

$$\forall t \in [-1, 1], \quad (\psi(f))(t) = f(-t)$$

- (1) Montrer que les fonctions paires et les fonctions impaires sont deux sous-espaces orthogonaux dans E .
- (2) Montrer que ψ est un endomorphisme orthogonal.
- (3) Montrer que l'application ϕ définie par $\forall t \in [-1, 1], (\phi(f))(t) = tf(t^3)$ est un endomorphisme orthogonal.
- (4) Montrer que ϕ n'est pas surjectif.

Exercice 44 (♠ Dimension 2).

- (1) Donner la matrice dans la base canonique de la réflexion par rapport à la droite $\mathbb{R}(2e_1 + e_2)$
- (2) Donner la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle $\theta = \text{Arc cos}(\frac{1}{3})$
- (3) Donner la nature précise des endomorphismes u, v de E dont les matrices dans une base orthonormée sont :

$$M_u = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_v = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

- (4) Soit $x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $y = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Justifier sans calcul qu'il existe une unique rotation g de $\mathbb{R}^2$ telle que $g(x) = y$.
- (5) Calculer la matrice de la rotation précédente dans la base canonique.

Exercice 45 (Centre de $O(2)$).

On se place dans le groupe orthogonal de dimension 2. On rappelle que le centre est

$$Z(O(2)) = \{u \in O(2) \mid \forall g \in O(2), g \circ u = u \circ g\}$$

- (1) (♥) Soit R une rotation et S une symétrie. Montrer que $S \circ R \circ S = R^{-1}$.
- (2) (★) Le résultat précédent est-il vrai en dimension 3 ?
- (3) En déduire que le centre ne contient aucune symétrie.
- (4) Montrer que si une rotation R est dans $Z(O(2))$, alors R est d'ordre 2.
- (5) Conclure que le centre est $Z(O(2)) = \{\text{Id}, -\text{Id}\}$.
- (6) Quel est le centre de $SO(2)$?

Exercice 46 (Sous-groupes finis de $SO(2)$).

Soit $G < SO(2)$ un sous-groupe **fini**. Le but de l'exercice est de montrer que G est un groupe cyclique.

On considère l'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} &\rightarrow SO(2) \\ \theta &\mapsto R_\theta \end{aligned}$$

- (1) Justifier que $\phi^{-1}(G)$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.
- (2) Montrer que $\phi^{-1}(G) \cap \mathbb{R}^{+*}$ possède un plus petit élément.
- (3) En déduire que $\phi^{-1}(G)$ est monogène.
- (4) Conclure que G est cyclique.
- (5) Pouvez-vous trouver un sous-groupe strict de $SO(2)$ qui ne soit pas cyclique ? pas monogène ?

Exercice 47 (Groupe Diédral).

Soit P_n le polygone régulier à n cotés centré en $(0, 0)$, avec $n \geq 3$. On note D_n l'ensemble des isométries g du plan telles que $g(P_n) = P_n$.

- (1) Montrer que D_n est un groupe.
- (2) Justifier que $D_n^+ = D_n \cap SO(2)$ est un groupe cyclique. Quel est son cardinal ?
- (3) Justifier que D_n^+ est un sous-groupe distingué de D_n
- (4) Justifier que D_n contient une symétrie σ .
- (5) Montrer que tout élément $\phi \in D_n$ s'écrit de façon unique sous la forme $\phi = R \circ S$ avec $R \in D_n^+$ et $S \in \langle \sigma \rangle$.
- (6) Montrer que tout sous-groupe fini de $O(2)$ est soit un groupe cyclique, soit un groupe diédral.