Aix–Marseille Université	2015-2016

Algèbre

Parcours PEIP2

Planche TD 1 – Rappels d' Algèbre Linéaire

Généralités

Exercice 1. Justifier si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ est combinaison linéaire de $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2. Soient $\mathbf{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha\,\mathbf{u} = \mathbf{0}$, alors $\alpha = 0$ ou $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

3. Soient $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, alors $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

4. Soient $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$. On suppose qu'il existe deux réels non nuls α et β tels que $\alpha\,\mathbf{u} + \beta\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Alors l'ensemble des combinaisons linéaires de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ est une droite.

5. Il existe 2 vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^2$ tel que tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est combinaison linéaire de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.

6. Il existe 2 vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^3$ tel que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.

Exercice 2. Soient $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$. On note E l'ensemble de leurs combinaisons linéaires. Discuter en fonction de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ si les situations suivantes peuvent avoir lieu ?

1. E est réduit au vecteur nul,
2. E est une droite,
3. E est un plan,
4. E est l'espace tout entier.

Exercice 3. Décrire géométriquement (droite, plan ou $\mathbb{R}^3$ tout entier) l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs suivants :

$$(a)\ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad (b)\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (c)\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 4. Déterminer les solutions des systèmes suivants. Représenter graphiquement les solutions.

$$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 3x + 5y = 17 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y + 4z = 3 \\ x + 4y + 5z = 4 \end{cases}$$

Exercice 5. Résoudre le système suivant par la méthode de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 7y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & 5z & = & 4 \\ -4x & + & 3y & + & z & = & 5 \end{array}\right.$$

Exercice 6. Considérons l'équation différentielle suivante :

$$x''(t) - x'(t) - x(t) = \cos(t).$$

Cette équation peut décrire un oscillateur forcé amorti comme vous l'avez vu en mécanique. Ce type d'équation admet une solution de la forme

$$x(t) = a\sin(t) + b\cos(t).$$

Trouver a et b et esquisser le graphe de la solution.

Exercice 7. Trouver les polynômes de degré 2 dont le graphe passe par les points $(1,-1)$, $(2,3)$ et $(3,13)$. Dessiner les graphes de ces polynômes.

Exercice 8. Soient a, α et β des réels. On considère le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccl} a\,x & + & y & = & \alpha \\ x & + & a\,y & = & \beta \end{array}\right.$$

Donner les valeurs de a, α et β pour lesquelles le système admet :

1. une solution unique;
2. une infinité de solutions;
3. pas de solution.

Exercice 9. Résoudre le système linéaire qui suit (selon la valeur de a) :

$$\left\{\begin{array}{ccccccl} a\,x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & a\,z & = & 2 \\ x & + & a\,y & + & z & = & 3 \end{array}\right.$$

Exercice 10. Soient

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

et on note E l'ensemble de toute combinaison linéaire de $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$, c'est-à-dire

$$E = \{\alpha\,\mathbf{u} + \beta\,\mathbf{v} + \gamma\,\mathbf{w}\ :\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Dire si le vecteur $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \in E$ et justifier la reponse. Écrire $\mathbf{z}$ sous la forme $\alpha\,\mathbf{u} + \beta\,\mathbf{v} + \gamma\,\mathbf{w}$ en résolvant un système **par la methode de Gauss**.

Calcul matriciel

Exercice 11. Soient A une matrice 3×7, B une matrice 7×3, C une matrice 7×1, et D une matrice 3×1, dont tous les coefficients sont égaux 1 (on les appelle *matrices d'Attila...*). Parmi les opérations suivantes, dire lesquelles sont autorisées, et dans ce cas, calculer la matrice résultante.

$$A\,B \qquad B\,A \qquad A\,B\,D \qquad D\,B\,A \qquad A\,(B+C)$$

Exercice 12. Calculer à la main, lorsqu'ils sont définis, les produits de matrices indiqués. Donnez ensuite les transposées des produits.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 3 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

Exercice 13. Déterminer une matrice 2×2, A, non nulle telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 14. Déterminer une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, non nulle, telle que $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 15. Étant donnée la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, déterminer une matrice A telle que $BA = I_2$. Combien de solutions A ce problème a-t-il ?

Exercice 16. Quelles sont parmi les matrices suivantes celles qui sont égales à $(A-B)^2$, quelque soient les matrices carrées d'ordre n, A et B ?

$$A^2 - B^2 \qquad (B-A)^2 \qquad A - 2\,A\,B + B^2 \qquad (A-B)A - (A-B)B \qquad A^2 - A\,B - BA + B^2.$$

Exercice 17. Soient A et B des matrices $n\times n$. Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies indépendamment du choix de A et B ?

i) $(I_n - A)(I_n + A) = I_n - A^2$.

ii) $(A+B)^2 = A^2 + 2\,A\,B + B^2$.

iii) $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$.

Supposons de plus que A et B sont inversibles. Même question pour les relations suivantes :

iv) A^2 est inversible et $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.

v) $A + B$ est inversible et $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

vi) $A\,B\,B^{-1}\,A^{-1} = I_n$.

vii) $A\,B\,A^{-1} = B$.

viii) $(A\,B\,A^{-1})^3 = A\,B^3\,A^{-1}$.

ix) $(I_n + A)(I_n + A^{-1}) = 2\,I_n + A + A^{-1}$.

x) $A^{-1}B$ est inversible et $(A^{-1}\,B)^{-1} = B^{-1}\,A$.

Exercice 18. Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. On suppose que cette matrice est inversible. Calculer la matrice A^{-1} en fonction de a, b, c, et d par identification. Exprimer la condition sur a, b, c, et d pour que la matrice soit effectivement inversible.

Exercice 19. Soit

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculer A^2 et montrer que $A^2 = 2\,I_2 - A$, en déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 20. Soient A et B deux matrices symétriques. Les matrices A^2, $A\,B$, $A^2 - B^2$, $(A+B)\,(A-B)$, $B\,A\,B$ et $B\,A\,B\,A$ sont elles symétriques ? (si oui, justifier, sinon, donner un contre-exemple).

Exercice 21. Echelonner les matrices suivantes:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

Exercice 22. Résoudre en utilisant l'échelonnement les systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ 5\,x & + & 4\,y & + & 3\,z & = & 2 \\ 6\,x & + & 3\,y & + & 2\,z & = & -4 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 1 \\ -x & + & 3\,y & & & = & 0 \\ & - & 2\,y & + & z & = & -3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & + & 4t & = & 2 \\ & & y & + & 3z & - & 4t & = & -2 \\ & & & & z & - & 2t & = & 0 \\ x & + & y & - & z & + & 2\,t & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & 2\,y & - & 2\,z & + & 4\,t & + & u & = & 0 \\ & & y & + & 3\,z & - & 4\,t & + & 2\,u & = & 0 \\ x & & & + & z & - & 2\,t & + & 3\,u & = & 0 \\ x & + & y & + & 4\,z & - & 6\,t & + & 5\,u & = & 0 \\ & & 3\,y & & & + & 2\,t & & & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 23. Echelonner les matrices suivantes et dire si elles sont inversibles; le cas échéant calculer leurs inverses *par échelonnement total*:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Espaces vectoriels

Exercice 24. Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = 2\,x\} \qquad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 3\,x - y = 0\}$$

Même question pour les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y + z = 1\}, \qquad D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x - y + 4\,z = 0\}$$

$$E = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y + z = 0 \;\text{ et }\; 2\,x - y + 3\,z = 0\big\}, \qquad F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\; x \le y \le z\big\}.$$

Exercice 25. Soient V et W deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Est-ce que $V \cap W$ est toujours un sous-espace vectoriel de E ? Est-ce que $V \cup W$ est toujours un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 26. Considérons $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$ avec $\mathbf{u}_1 = 0$. Est-ce que ces vecteurs sont linéairement indépendants ?

Exercice 27. Est-ce que ces vecteurs sont linéairement indépendants ?

$$\text{i)} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \text{ii)} \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{iii)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \text{iv)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{v)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \text{vi)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad \text{vii)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Exercice 28. Donner les dimensions des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés par les familles de vecteurs suivants :

$$(a) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad (b) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (c) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 29. Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (4, 1, 4)$ et $v_3 = (2, -1, 4)$.

1. Montrer que v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires. Faire de même avec v_1 et v_3, puis avec v_2 et v_3.
2. La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est-elle libre ?

Exercice 30 (Familles de fonctions)**.** Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, i.e. l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Dire parmi les familles suivantes celles qui sont libres et celles qui sont liées.

`Attention!` Ici les vecteurs (au sens *éléments d'un espace vectoriel*) sont donc des fonctions...

1. $\{f, g, h\}$, avec $f(x) = 2$, $g(x) = 4\sin^2 x$, $h(x) = \cos^2 x$

2. $\{f, g, h\}$, avec $f(x) = 1$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = \sin(2\,x)$.

3. $\{f, g\}$, avec $f(x) = x$, $g(x) = \cos x$.

4. $\{f, g, h, k\}$, avec $f(x) = (1 + x)^2$, $g(x) = x^2 + 2x$, $h(x) = 3$ et $k(x) = x$.

5. $\{f, g, h\}$, avec $f(x) = \cos(2\,x)$, $g(x) = \sin^2 x$; $h(x) = \cos^2 x$.

6. $\{f, g, h\}$, avec $f(x) = 0$, $g(x) = x$, $h(x) = x^2$.

Exercice 31. Soient E et F les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés respectivement par les familles de vecteurs:

$$\{(2, 3, -1); (1, -1, 2)\} \quad \text{et} \quad \{(3, 2, 1); (1, 4, -3)\}.$$

Montrer que $E = F$.

Exercice 32. 1. Montrer que

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En déduire la dimension de cet espace.

2. Donner une base et la dimension des matrices carrées d'ordre n.

3. Donner une base et la dimension des matrices carrées d'ordre n diagonales.

4. Donner une base et la dimension des matrices carrées d'ordre n symétriques.

5. Donner une base et la dimension des matrices carrées d'ordre n triangulaires supérieures.

Exercice 33. Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. L'ensemble E est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base.

Exercice 34. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, les familles de vecteurs suivantes constituent-elles une base ? (On pourra utiliser la méthode de l'échelonnement)

1. $x_1 = (1, -1, 0)$, $\quad x_2 = (1, 0, 1)$, $\quad x_3 = (1, 2, 3)$.

2. $x_1 = (1, 0, -1)$, $\quad x_2 = (0, 1, 0)$, $\quad x_3 = (1, 1, 0)$.

3. $x_1 = (1, 2, 3)$, $\quad x_2 = (2, 3, 1)$, $\quad x_3 = (0, 0, 0)$.

4. $x_1 = (1, 0, 0)$, $\quad x_2 = (1, 1, 0)$, $\quad x_3 = (1, 1, 1)$.

5. $x_1 = (1, 1, -1)$, $\quad x_2 = (1, -1, 1)$, $\quad x_3 = (-1, 1, 1)$.

Exercice 35. Montrer que les vecteurs suivants forment une base de $\mathbb{R}^4$.

$$V_1 = (0, 1, 1, 1),\ V_2 = (1, 0, 1, 1),\ V_3 = (1, 1, 0, 1),\ V_4 = (1, 1, 1, 0).$$

Dans cette base, calculer les composantes des vecteurs $U = (1, 1, 1, 1)$ et $V = (1, 0, 0, 0)$.

Exercice 36. Soit la famille de polynômes $\left\{X^3,\, X^2(X-1),\, X\,(X-1)^2, (X-1)^3\right\}$. Montrer qu'elle engendre $\mathbb{R}_3[X]$, le sous-espace des polynômes de degré inférieur ou égal à trois. Est-ce une base de $\mathbb{R}_3[X]$?

Exercice 37. Trouver le plus grand nombre possible de vecteurs linéairement indépendants parmi les vecteurs suivants :

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Exercice 38. Déterminer la dimension des sous espaces vectoriels engendrés par chacune des 2 familles de vecteurs ci-dessous. Donnez en une base et exprimer les coordonnées de chacun des vecteurs de la famille dans la base trouvée.

1. la famille $\{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$ avec :

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad V_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad V_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad V_5 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix},$$

2. la famille $\{W_1, W_2, W_3, W_4\}$ avec :

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad W_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad W_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad W_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -13 \end{bmatrix},$$

Applications linéaires

Exercice 39. Déterminer parmi les applications suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$, celles qui sont linéaires :

1. $\Pi_1(x,y) = x, \quad \Pi_2(x,y) = y,$
2. $f_1(x,y) = xy, \qquad f_2(x,y) = x+y, \qquad f_3(x,y) = x+y+1, \qquad f_4(x,y) = x^2 - y^2,$
3. $f_5(x,y) = |x+y|, \qquad f_6(x,y) = \sin x, \qquad f_7(x,y) = x - 3\,y.$
4. $g_1(x,y) = (y,x), \qquad g_2(x,y) = (x,y^2), \qquad g_3(x,y) = (1,x).$

Exercice 40. Déterminer le noyau et l'image (base et dimension) de chacune des applications linéaires f suivantes :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (3x+y, x-y)$;
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x+y, x)$;
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x+2y, 2x+4y)$;
4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (z,y,0)$;
5. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (x-y, x+y, x+2y)$.

Exercice 41. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^6$ donnée par :

$$\begin{array}{rcl} f(1,0,0,0) & = & (-1,-1,-1,0,0,0) \\ f(0,1,0,0) & = & (1,0,0,-1,-1,0) \\ f(0,0,1,0) & = & (0,1,0,1,0,-1) \\ f(0,0,0,1) & = & (0,0,1,0,1,1) \end{array}$$

Déterminer l'image d'un vecteur (x_1,x_2,x_3,x_4) de $\mathbb{R}^4$. Déterminer le rang de f.

Exercice 42. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x_1,x_2) = (x_2,x_1)$.

1. Ecrire la matrice A de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ canonique.
2. Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$ avec $\mathbf{e}'_1 = (0,1)$, $\mathbf{e}'_2 = (1,0)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Ecrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et calculer son inverse P^{-1}.
4. Ecrire la matrice A' de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B}'$.
5. Vérifier que $A' = P^{-1}\,A\,P$.
6. Mêmes questions avec la famille de vecteurs $\mathcal{B}'' = (\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2)$ avec $\mathbf{e}''_1 = (1,1)$, $\mathbf{e}''_2 = (1,-1)$

Exercice 43. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x_1,x_2) = (x_1 + 2x_2, x_1).$$

1. Ecrire la matrice A de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ canonique.

2. Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$ avec $\mathbf{e}'_1 = (2, 1)$, $\mathbf{e}'_2 = (1, -1)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

3. Ecrire la matrice $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ de l'application identité de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}')$ dans $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B})$.

4. En déduire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et calculer son inverse P^{-1}.

5. Ecrire la matrice A' de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B}'$.

6. Vérifier que $A' = P^{-1}AP$.

Exercice 44. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$\mathbf{u} = (1, -1, 0), \qquad \mathbf{v} = (1, 1, 1), \qquad \mathbf{w} = (0, 1, 1).$$

1. Montrer que les trois vecteurs $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Ecrire la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}$ à cette base notée $\mathcal{B}'$. Calculer P^{-1}.

2. On considère l'application linéaire f définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = (x + 3\,y - 3\,z,\ x - y + z,\ x + y - z).$$

   Déterminer la matrice de cette application dans la base canonique.

3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

4. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. Quel est sa dimension?

5. En déduire le rang de f et donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 45. On considére une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par:

$$f(e_1) = V_1, \quad f(e_2) = V_2 \quad et \quad f(e_3) = V_3,$$

où e_1, e_2 et e_3 sont les trois vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et les vecteurs V_i sont définis par:

$$V_1 = (1, -1, 1), \qquad V_2 = (1, 1, -1), \qquad V_3 = (1, 0, 0).$$

1. Ecrire f en composantes (c'est à dire $f(x, y, z) = ?$).

2. Ecrire la matrice A de l'application linéaire f.

3. Déterminer le noyau et l'image de f. Donner une base du noyau et de l'image et en déduire leur dimensions respectives.

4. L'application f est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

5. On considère maintenant les trois vecteurs suivants:

$$X_1 = (1, -1, 1), \qquad X_2 = (1, 1, -1), \qquad X_3 = (-1, 1, 1).$$

   (a) Montrer que les trois vecteurs $\{X_1, X_2, X_3\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Ecrire la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}$ à cette base notée $\mathcal{B}'$.

   (c) Calculer P^{-1} par échelonnement total.

   (d) En déduire la matrice A' qui représente l'application linéaire f dans cette nouvelle base

Déterminants

Exercice 46. Calculer les déterminants suivants $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 8 \\ 0 & 7 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

Exercice 47. Expliquez pourquoi $\begin{vmatrix} 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 \\ 1 & 1 & 1-a \end{vmatrix} = (3-a)\,a^2$.

Exercice 48. La famille $\{(2,1,0),\ (1,3,1),\ (5,2,1)\}$ est-elle libre ?

Exercice 49. Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui calculer leur inverse.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 50. Déterminer si les applications linéaires suivantes sont bijectives. Les cas écheant, trouver leur inverse.

i) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x_1, x_2) = (3\,x_1 + 5\,x_2,\ 5\,x_1 + 8\,x_2)$.

ii) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2\,x_2,\ 4\,x_1 + 8\,x_2)$.

iii) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2,\ x_3,\ x_1)$.

iv) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3,\ x_1 + 4\,x_2 + 9\,x_3).$$

Exercice 51. Calculer les déterminants suivants:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$